

Dodatkowe zadania z algebry i geometrii analitycznej

Zadania te są produktem ubocznym rozmaitych rachunków wykonywanych w celach naukowych lub dla rozrywki. Prawdopodobnie z czasem zadań będzie tu coraz więcej.

Zad. 1.

Jest to rozszerzenie zadania 2.10.

Wiadomo, że $\exp(i\alpha) = \cos \alpha + i \sin \alpha$ gdy α jest liczbą zespoloną. Wykazać następujące uogólnienie tego wzoru:

$$\exp(i\alpha\hat{A}) = I_n \cos \alpha + i\hat{A} \sin \alpha,$$

gdzie I_n jest macierzą jednostkową stopnia n , $\hat{A}$ jest dowolną macierzą stopnia n spełniającą warunek $\hat{A}^2 = I_n$.

Zad. 2.

Unitarna macierz stopnia drugiego $\hat{Q}$ cyklicznie permutuje macierze Pauliego w sensie transformacji podobieństwa, tzn.

$$\hat{Q}^{-1}\sigma_1\hat{Q} = \sigma_3, \quad \hat{Q}^{-1}\sigma_2\hat{Q} = \sigma_1, \quad \hat{Q}^{-1}\sigma_3\hat{Q} = \sigma_2. \quad (1)$$

(a) Wykazać, że macierz $\hat{Q}^3$ jest proporcjonalna do macierzy jednostkowej I_2 .

(b) Znaleźć postać macierzy $\hat{Q}$ i sprawdzić, że $\hat{Q}^3 \sim I_2$.

Wskazówki.

Macierz $\hat{Q}^3$ komutuje z macierzami Pauliego. Wiadomo, że każda taka macierz jest proporcjonalna do I_2 .

Elementy macierzy $\hat{Q}$ znajdujemy rozwiązując układy równań liniowych $\sigma_1\hat{Q} = \hat{Q}\sigma_3$, $\sigma_2\hat{Q} = \hat{Q}\sigma_1$, $\sigma_3\hat{Q} = \hat{Q}\sigma_2$ i nakładając warunek unitarności.

Zad. 3.

Macierz $\hat{A}$ ma m wierszy oraz n kolumn, przy czym $n > m$, rz $\hat{A} = m$.

(a) Wykazać, że istnieje macierz $\hat{D}$ mająca n wierszy, $n - m$ kolumn i rząd równy $n - m$ taka, że $\hat{A}\hat{D} = 0$.

(b) Wykazać, że wektor $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix}$ jest rozwiązaniem układu m równań

$$\hat{A}\mathbf{x} = 0 \quad (2)$$

wtedy i tylko wtedy gdy istnieje wektor $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c^1 \\ c^2 \\ \vdots \\ c^{n-m} \end{bmatrix}$ taki, że

$$\mathbf{x} = \hat{D}\mathbf{c}. \quad (3)$$

Zatem każde rozwiązanie równania (2) można zapisać w postaci (3).

(c) Wykazać, że w zbiorze rozwiązań niejednorodnego układu równań

$$\hat{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}_0 \quad (4)$$

znajduje się rozwiązanie mające co najmniej $n - m$ współrzędnych $x^1, \dots, x^n$ równych 0.

(d) Przyjmijmy, że macierz $\hat{A}$ oraz wektory $\mathbf{x}, \mathbf{y}_0, \mathbf{c}$ są rzeczywiste, $n = 3$. W tym wypadku wektor $\mathbf{x}$ można uważać za wektor wodzący punktu w $\mathbb{R}^3$. Podać interpretację geometryczną wyników z poprzedniego punktu. Rozpatrzyć oddzielnie przypadki $m = 1, m = 2$.

Wskazówki.

Korzystamy z twierdzenia mówiącego, że układ równań (2) ma $n - m$ liniowo niezależnych rozwiązań $\mathbf{x}_{(1)}, \dots, \mathbf{x}_{(n-m)}$, które tworzą bazę w przestrzeni liniowej wszystkich rozwiązań. Macierz $\hat{D}$ tworzymy z wektorów $\mathbf{x}_{(1)}, \dots, \mathbf{x}_{(n-m)}$ ustawiając je obok siebie jako

kolumny macierzy. Ponieważ wektory te są liniowo niezależne, $rz\hat{D} = n - m$.

Punkt **(b)** wynika stąd, że dowolne rozwiązanie układu (2) jest kombinacją liniową rozwiązań bazowych. Prawa strona wzoru (3) jest taką kombinacją liniową ze współczynnikami $c^1, \dots, c^{n-m}$.

W punkcie **(c)** korzystamy z ogólnego rozwiązania układu (4). Niech $\mathbf{x}_0$ oznacza pewne jego rozwiązanie. Ogólne rozwiązanie ma postać

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \hat{D}\mathbf{c}, \quad (5)$$

gdzie wektor $\mathbf{c}$ jest dowolny. Tę dowolność wykorzystujemy do uzyskania rozwiązania spełniającego dodatkowe warunki. Ponieważ $rz\hat{D} = n - m$, istnieje nieosobliwy minor $\hat{d}$ stopnia $n - m$ macierzy $\hat{D}$. Z rozwiązania (5) wykreślamy m wierszy nie należących do tego minora. Otrzymujemy wzór $\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{x}}_0 + \hat{d}\mathbf{c}$, gdzie wężyk oznacza wektory otrzymane przez wykreślenie wskazanych wierszy. Kładąc $\tilde{\mathbf{x}} = 0$ otrzymujemy układ równań dla współrzędnych wektora $\mathbf{c}$, $\hat{d}\mathbf{c} = -\tilde{\mathbf{x}}_0$, którego rozwiązaniem jest $\mathbf{c} = -\hat{d}^{-1}\tilde{\mathbf{x}}_0$. Po wstawieniu tego wektora we wzorze (5) otrzymujemy rozwiązanie układu (4) mające żadaną własność.

Punkt **(d)**. Gdy $m = 1$, rozwiązanie ogólne (5) można przedstawić jako płaszczyznę. Rozwiązanie szczególne ze znikającymi dwiema współrzędnymi to punkt przebicia tej płaszczyzny jedną z osi układu współrzędnych. W wypadku $m = 2$ rozwiązanie ogólne daje linię prostą, a rozwiązanie szczególne daje punkt przebicia przez tę prostą jednej z płaszczyzn: $x^1 = 0, x^2 = 0, x^3 = 0$.

Uwaga. Macierz $\hat{D}$ możemy powiększyć dopisując dowolną liczbę kolumn będących kombinacjami liniowymi wektorów bazowych $\mathbf{x}_{(1)}, \dots, \mathbf{x}_{(n-m)}$, jednakże takie uogólnienie nie jest interesujące.