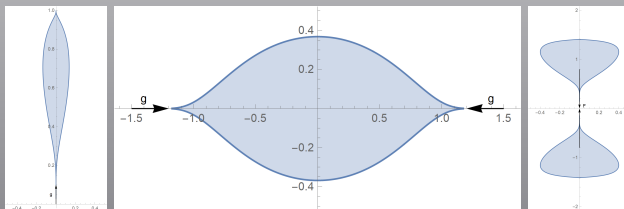


MAKSYMALNA GRAWITACJA

Andrzej Odrzywołek
& Konrad Pawlik, SMP

IFT UJ

Seminarium astrofizyczne
12:30, Środa, 5 maja 2021



- Znanym zagadnieniem jest maksymalne przyspieszenie grawitacyjne g występujące w przyrodzie (białe karły, gwiazdy neutronowe)
- Jeszcze inny problem to teoretyczny limit na możliwe wartości g (czarne dziury na skali Plancka)
- Celem referatu jest przedyskutowanie pomysłów na wygenerowanie największego możliwego natężenia pola grawitacyjnego g (ewentualnie siły F_g pomiędzy 2 ciałami) w warunkach **laboratoryjnych**
- Motywacją jest usprawnienie pomiarów stałej grawitacyjnej poprzez użycie niestandardowej geometrii eksperymentu

$$G = 6.67? \times 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{s}^2 \text{kg}}$$

Dla porównania:

CODATA: $G = 6.67430 \pm 0.00015(1\sigma)$

- Znanym zagadnieniem jest maksymalne przyspieszenie grawitacyjne g występujące w przyrodzie (białe karły, gwiazdy neutronowe)
- Jeszcze inny problem to teoretyczny limit na możliwe wartości g (czarne dziury na skali Plancka)
- Celem referatu jest przedyskutowanie pomysłów na wygenerowanie największego możliwego natężenia pola grawitacyjnego g (ewentualnie siły F_g pomiędzy 2 ciałami) w warunkach **laboratoryjnych**
- Motywacją jest usprawnienie pomiarów stałej grawitacyjnej poprzez użycie niestandardowej geometrii eksperymentu

$$G = 6.67? \times 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{s}^2 \text{kg}}$$

Dla porównania:

CODATA: $G = 6.67430 \pm 0.00015(1\sigma)$

- Znanym zagadnieniem jest maksymalne przyspieszenie grawitacyjne g występujące w przyrodzie (białe karły, gwiazdy neutronowe)
- Jeszcze inny problem to teoretyczny limit na możliwe wartości g (czarne dziury na skali Plancka)
- Celem referatu jest przedyskutowanie pomysłów na wygenerowanie największego możliwego natężenia pola grawitacyjnego g (ewentualnie siły $\mathbf{F}_g$ pomiędzy 2 ciałami) w warunkach **laboratoryjnych**
- Motywacją jest usprawnienie pomiarów stałej grawitacyjnej poprzez użycie niestandardowej geometrii eksperymentu

$$G = 6.67? \times 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{s}^2 \text{kg}}$$

Dla porównania:

CODATA: $G = 6.67430 \pm 0.00015(1\sigma)$

- Znanym zagadnieniem jest maksymalne przyspieszenie grawitacyjne g występujące w przyrodzie (białe karły, gwiazdy neutronowe)
- Jeszcze inny problem to teoretyczny limit na możliwe wartości g (czarne dziury na skali Plancka)
- Celem referatu jest przedyskutowanie pomysłów na wygenerowanie największego możliwego natężenia pola grawitacyjnego g (ewentualnie siły F_g pomiędzy 2 ciałami) w warunkach **laboratoryjnych**
- Motywacją jest usprawnienie pomiarów stałej grawitacyjnej poprzez użycie niestandardowej geometrii eksperymentu

$$G = 6.67? \times 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{s}^2 \text{kg}}$$

Dla porównania:

CODATA: $G = 6.67430 \pm 0.00015(1\sigma)$;

wynik Cavendisha z XVII wieku $G = 6.74$

Standardowe wzory

Dla jednorodnej kuli o promieniu R , i gęstości ρ , masa $M = \rho V$, $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ czyli

$$g = \frac{GM}{R^2} = \frac{4}{3}\pi G\rho R.$$

Wniosek

Istnieją 2 „sposoby” zwiększania g

- ❶ ścisnąć masę M do możliwie małego promienia R (proces „naturalny”)
- ❷ utworzyć możliwie dużą kulę z materiału o gęstości ρ (proces „sztuczny”)

Oba procesy ułtymatycznie prowadzą do powstania czarnej dziury, dla której definicja g jest nietrywialna, ale daje wynik (surface gravity κ) identyczny z newtonowskim:

$$g = \frac{c^4}{4GM} \quad \left(= \frac{2\pi k_{\text{BC}}}{\hbar} T_{\text{H}}\right).$$

- Zarówno g , jak i temperatura Hawkinga/Horyzontu T_{H} są *odwrotnie* proporcjonalne do masy. Dla najcięższej supermasywnej czarnej dziury $M = 66 \times 10^9 M_{\odot}$, $g = 230 \text{ m/s}^2$
- „Doświadczenie” g nie jest możliwe, gdyż jedynym możliwym ruchem w rejonie horyzontu jest spadek swobodny neutralizujący punktowo grawitację
- Odczujemy natomiast siły pływowe

Naturalne obiekty o dużym g są wynikiem *samograwitacji*, czyli ulegają kompresji pod własnym ciężarem! Dotyczy to wyłącznie obiektów o rozmiarach astronomicznych np:

- 1 egzoplanety (Super-Ziemie) $\bar{\rho} \sim 50 \dots 100 \text{ g/cc}$; $g = ?$
- 2 brązowe karły
- 3 białe karły
- 4 gwiazdy neutronowe

Powszechnie przytaczane nieporozumienie

„Łyżeczka materii neutronowej o gęstości $\rho = 10^{15} \text{ g/cc}$ na Ziemi ważyłaby 5 miliardów ton”

Powyższe jest nonsensem, bo

- wysoka gęstość materii neutronowej wynika głównie ze ściśnięcia przez grawitację
- po „wydobyciu” na zewnątrz materia wróci do naturalnej gęstości
- neutrony w warunkach normalnych ($P = 10^5 \text{ Pa}$, $T = 20^\circ \text{C}$) tworzą jednoatomowy gaz doskonały, którego gęstość wynosi

$$\rho = \frac{P m_n}{kT} = 0.04 \text{ kg/m}^3$$

czyli podobnie jak dla wodoru.

$$g = G \left(\frac{16\pi^2 M \rho^2}{9} \right)^{1/3}$$

Znane z dużej gęstości są metale, używane w eksperymentach wyznaczających G

	gęstość	cena
żelazo	$\rho = 7.87 \text{ g/cc,}$	\$ 162/t
miedź	$\rho = 8.96 \text{ g/cc,}$	\$8500/t
ołów	$\rho = 11.30 \text{ g/cc,}$	\$2000/t
rtęć (ciekła)	$\rho = 13.69 \text{ g/cc,}$	\$2000/t
uran (zubożony)	$\rho = 19.05 \text{ g/cc,}$	\$43k/t
wolfram	$\rho = 19.25 \text{ g/cc,}$	\$30k/t
złoto	$\rho = 19.30 \text{ g/cc,}$	\$57M/t
platyna	$\rho = 21.45 \text{ g/cc,}$	\$27M/t
iryd/osm	$\rho = 22.60 \text{ g/cc,}$	\$200M/t
has (pierwiastek 108)	$\rho = 29.00 \text{ g/cc,}$	∞ , czas życia 10 sekund
...		
pojedynczy neutron	$\rho = 7.8 \times 10^{14} \text{ g/cc}$	?, czas życia 15 minut

Opłacalność $cena/\rho^2$ wskazuje na Fe, potem Hg, Pb, W, Cu, U. Metal można też „wypożyczyć” lub potraktować jako inwestycję.

W eksperymentach z G pragmatyka wygrywa z finezją:

- Arystoteles, kamienne sześciany (eksperyment myślowy)
- Cavendish, XVIII wiek, ołowiane kule
- Chrzanowski, 1940, stalowe walce
- eksperymenty współczesne: miedziany toroid o przekroju prostokąta (źródło), płaski prostopadłościan (wahadło torsyjne)

Czy istnieje kształt który pozwoli zwiększyć g powyżej generowanego przez typowe źródła?

$$\oint \vec{g} d\vec{S} = 4\pi GM$$

Przykłady potencjałów pochodzących od obiektów 0, 1 i 2 wymiarowych są znane. We współrzędnych cylindrycznych r, z, ϕ

- punkt materialny

$$\varphi_p = -\frac{GM}{\sqrt{r^2 + z^2}}$$

- okrąg o promieniu a

$$\varphi_c = -\frac{2GM}{\pi} \frac{K(m)}{\sqrt{(a+r)^2 + z^2}}, \quad m = \frac{4ar}{(a+r)^2 + z^2} \quad (K \rightarrow \mathbf{EllipticK})$$

- nieskończenie cienki dysk o promieniu a

$$\varphi_d = \frac{2GM}{\pi a^2} \left\{ \pi |z| \Theta(a-r) - \sqrt{(a+r)^2 + z^2} \left[E(m) + \frac{a-r}{a+r} \left(\frac{m}{n} K(m) + \frac{n-m}{n} \Pi(n, m) \right) \right] \right\}$$

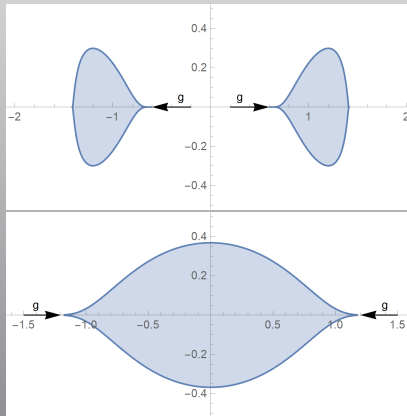
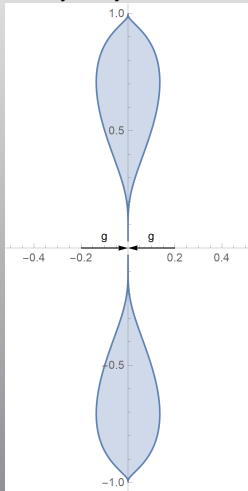
$$n = \frac{4ar}{(a+r)^2} \quad (E \rightarrow \mathbf{EllipticE}, \Pi \rightarrow \mathbf{EllipticPi}, \Theta \rightarrow \mathbf{HeavisideTheta}/\mathbf{UnitStep})$$

Wzory powyżej podano w konwencji programu *Mathematica*

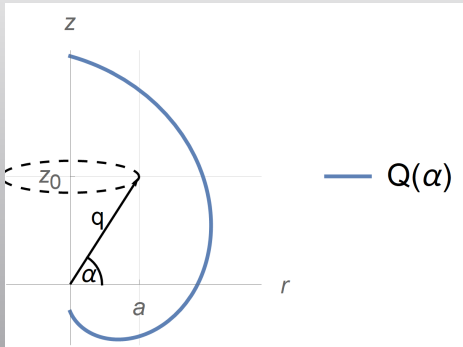
Dla powyższych potencjałów $g \rightarrow \infty$ w niektórych punktach.

Kształt maksymalizujący g — hipotezy

Korzystając z potencjału okręgu lub/i dysku możemy poskładać **dowolne** kształty osiowosymetryczne.



Objętość V i potencjał grawitacyjny ϕ dowolnej figury osiowej poskładanej z okręgów o promieniu a na wysokości z_0



$$V = \frac{2}{3} \pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} Q(\alpha)^3 \cos \alpha \, d\alpha$$

$$\phi(r, z) = 2\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{Q(\alpha)} q^2 \varphi_c(r, z, q, \alpha) \cos \alpha \, dq \right) d\alpha$$

Maksymalizowany względem „kształtu” $Q(\alpha)$ funkcjonał („działanie”)

$$S = 2\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{Q(\alpha)} q^2 \partial_z \varphi(r, z, q, \alpha) \cos \alpha dq d\alpha \pm \lambda \left(V - 2\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{Q^3}{3} \cos \alpha d\alpha \right)$$

z którego można odczytać „funkcję Lagrange’a”

$$\mathcal{L} = \int_0^{Q(\alpha)} q^2 \partial_z \varphi(x, z, q, \alpha) \cos \alpha dq \pm \lambda \left(\frac{V}{2\pi^2} - \frac{Q^3}{3} \cos \alpha \right)$$

Równanie Lagrange-Eulera:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q} = \frac{d}{d\alpha} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}} \equiv 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q} = Q^2 \partial_z \varphi(x, z, Q, \alpha) \cos \alpha \mp \lambda Q^2 \cos \alpha = Q^2 \cos \alpha (\partial_z \varphi(x, z, Q, \alpha) \mp \lambda)$$

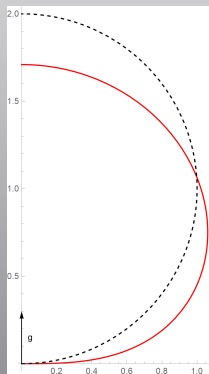
$$\partial_z \varphi(x, z, Q, \alpha) \mp \lambda = 0$$

Interesuje nas tylko punkt $r = 0, z = 0$:

$$\partial_z \varphi(0, 0, Q, \alpha) = \frac{G \sin \alpha}{Q^2}$$

Maksymalną grawitację w punkcie $(0,0)$ generuje figura powstała przez obrót dookoła osi pionowej wykresu funkcji zadanej we współrzędnych biegunowych wzorem

$$Q(\alpha) = 2a\sqrt{\sin \alpha}, \quad 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}.$$



Własności figury

- objętość $V = \frac{32}{15}\pi a^3$,
- dla $2a = \sqrt[3]{5}R$ objętość figury jest identyczna jak kuli o promieniu R ,
- wartość $g = \frac{3GM}{\sqrt[3]{25}R^3} \simeq 1.026 \frac{GM}{R^3}$,
- spłaszczenie $3^{3/4}/\sqrt{2} \simeq 1.61185$ (złoty podział z dokładnością 0.4%)

Komentarz

- 1 wynik jest znany, był m.in. zadaniem na Olimpiadzie Fizycznej, jest możliwy do uzyskania na poziomie licealnym (bez rachunku wariacyjnego) a także numerycznie
- 2 zysk względem kuli (a także innych prostych kształtów) jest znikomo mały: tylko 2.6% (!)
- 3 gdzie obiecane „prawie nieskończone” g ?
- 4 dlaczego kształt maksymalny nie posiada żadnych „kolców”, jest idealnie gładki ?
- 5 czy porzucenie założenia o symetrii osiowej lub gładkości/topologii rozwiązania cokolwiek zmieni?
- 6 w szczególności, czy „zaostrzony” na brzegu cienki dysk wygeneruje g podobne do nieskończonego cienkiego dysku?

Wydaje się, że problem można rozwiązać w zależności od parametru r_0 korzystając z identycznego funkcjonału, ale po zamianie:

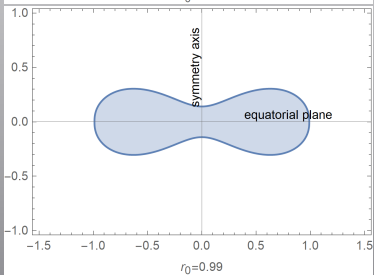
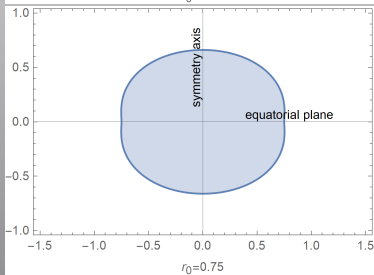
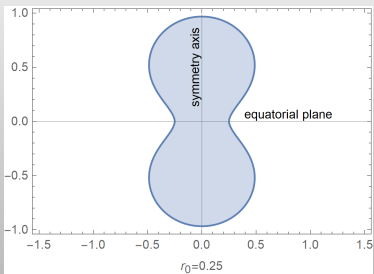
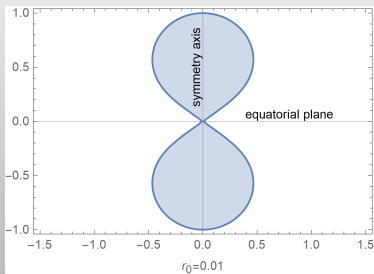
$$\partial_z \varphi(0, 0, q, \alpha) \rightarrow \partial_x \varphi(r_0, 0, q, \alpha).$$

Powyższa procedura produkuje nonsensowne wyniki, gdyż okazuje się, że ekstremalnego kształtu *nieda się* zapisać we współrzędnych biegunowych q, α .

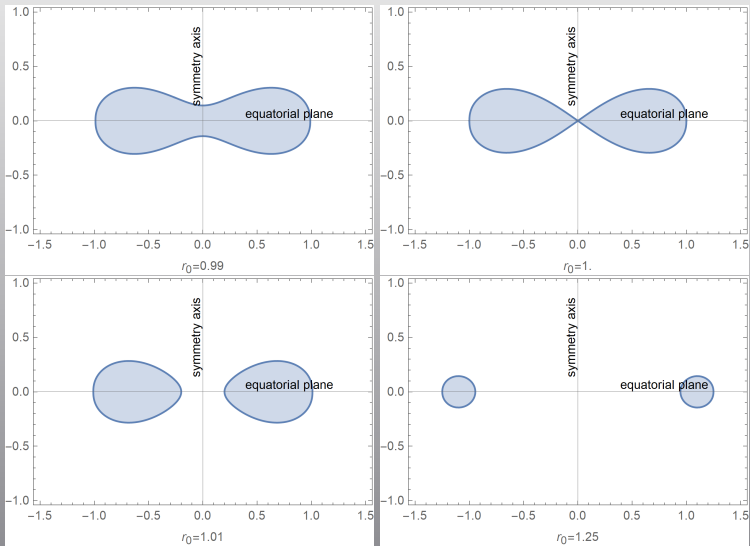
Rozwiązanie uwikłane we współrzędnych cylindrycznych r, z

$$\frac{1}{\pi r_0} \frac{(r^2 + z^2 - r_0^2)E(k) - ((r - r_0)^2 + z^2)K(k)}{((r - r_0)^2 + z^2)\sqrt{(r + r_0)^2 + z^2}} \leq -\lambda$$

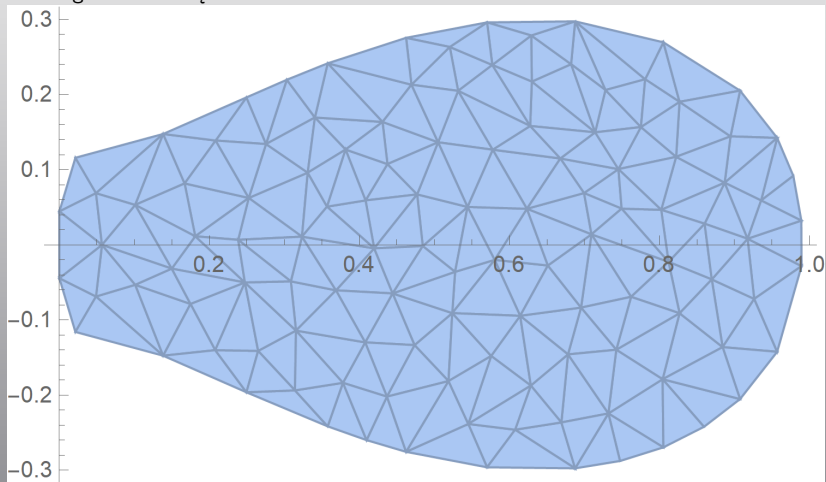
Ekstremalna grawitacja równikowa



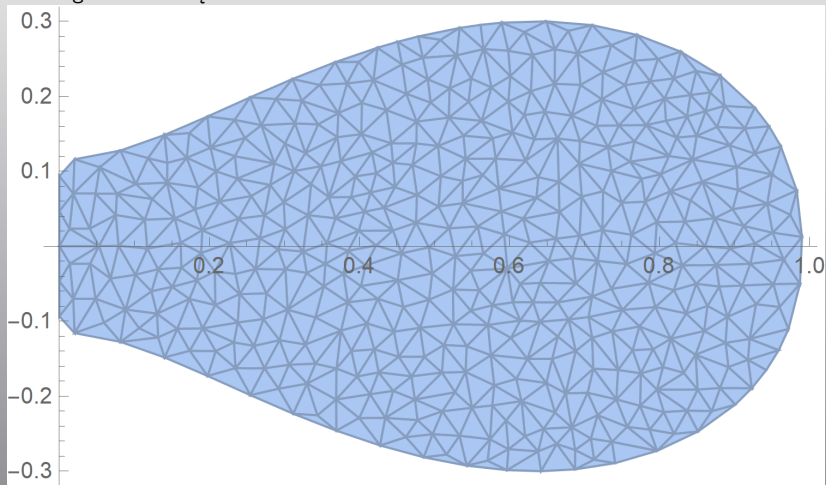
Ekstremalna grawitacja równikowa



Aby wyznaczyć kształt ekstremalny obliczamy numerycznie $g(r_0)$ poprzez triangulację zadanego f. uwikłaną obszar.

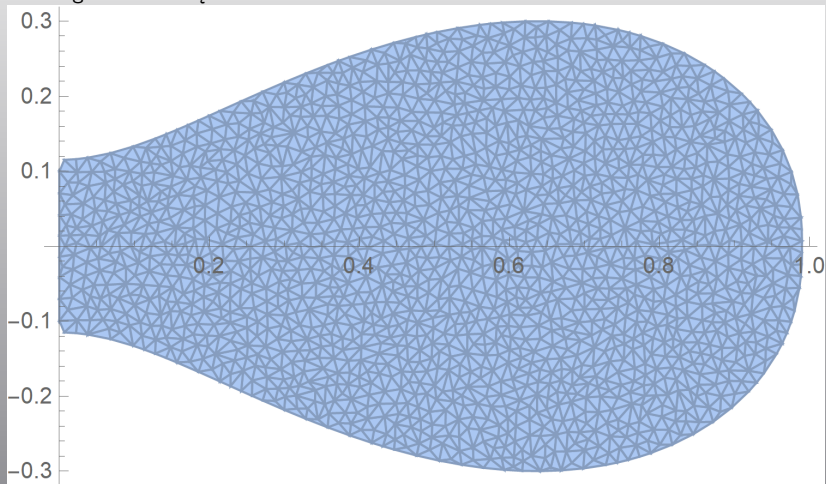


Aby wyznaczyć kształt ekstremalny obliczamy numerycznie $g(r_0)$ poprzez triangulację zadanego f. uwikłaną obszar.

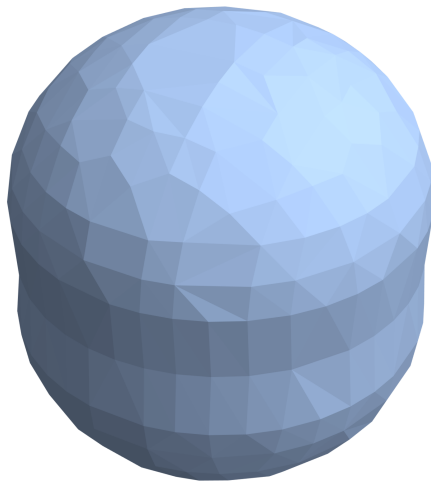
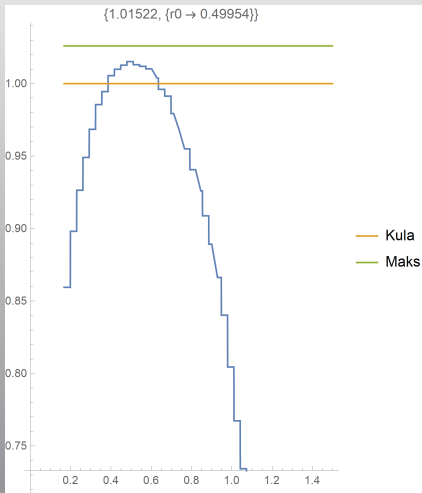


Ekstremalna grawitacja równikowa

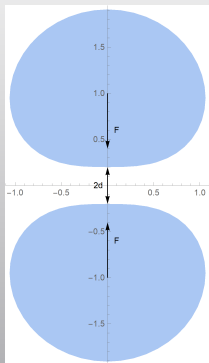
Aby wyznaczyć kształt ekstremalny obliczamy numerycznie $g(r_0)$ poprzez triangulację zadanego f. uwikłaną obszar.



Ekstremalna gravitacja równikowa: wynik



A co z ekstremum siły pomiędzy 2 ciałami?



$$E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} \int_{V_{\uparrow} \cup V_{\downarrow}} \rho(\phi_{\uparrow} + \phi_{\downarrow}) dV$$

$$F_{\text{max}} = \left. \frac{\partial E_{\text{pot}}}{\partial d} \right|_{d=0}$$

$$E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} \rho \int_d^{d+z_{\text{max}}} \int_0^{R(z)} (\phi(r, z-d) + \phi(r, -z-d)) 2\pi r dr dz$$

$$+ \frac{1}{2} \rho \int_{-d-z_{\text{max}}}^{-d} \int_0^{R(z)} (\phi(r, z-d) + \phi(r, -z-d)) 2\pi r dr dz$$

Po zamianie $z \rightarrow -z'$ w drugiej całce i rozwinięciu w szereg względem $d \simeq 0$

$$E_{\text{pot}} \simeq 2\pi\rho \int_0^{z_{\text{max}}} \int_0^{R(z)} (2\phi(r, 0) - 2\partial_z \phi(r, 0)) r dr dz$$

Czyli siła jest równa

$$F_{\text{max}} = \left. \frac{\partial E_{\text{pot}}}{\partial d} \right|_{d=0} = -4\pi\rho \int_0^{z_{\text{max}}} \int_0^{R(z)} \partial_z \phi(r, 0) r dr dz$$

Potencjał $\phi(r, z)$ możemy poskładać z potencjałów dysku φ_d

$$\phi(r, z) = \int_0^{z_{\text{max}}} \varphi(r, z - z_0, R(z_0)) dz_0.$$

Ostatecznie, szukamy ekstremum ze względu na nieznaną funkcję R funkcjonału:

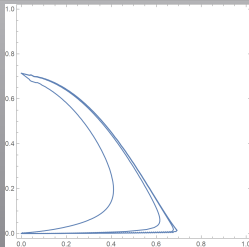
$$S = -4\pi\rho \int_0^{z_{\text{max}}} dz \int_0^{z_{\text{max}}} dz_0 \int_0^{R(z)} r dr \partial_z \varphi_d(r, -z_0, R(z_0)) \pm \lambda \left(V - \int_0^{z_{\text{max}}} dz \pi R(z)^2 \right).$$

WARNING: handwaving & soviet computational methods in use

$$\mathcal{L} = -4\pi\rho \int_0^{R(z)} \partial_z \varphi_d(r, -z_0, R(z_0)) r dr \pm \lambda' \pi R(z)^2$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R(z)} = -4\pi\rho \partial_z \varphi_d(R(z_0) + \epsilon, -z_0, R(z_0) + \epsilon) R(z_0) \pm \lambda' 2\pi R(z_0)^2 \quad ????$$

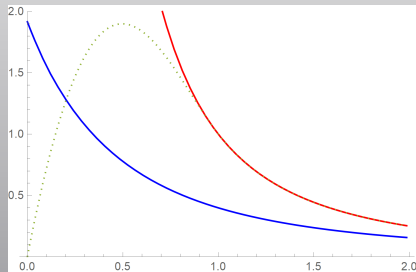
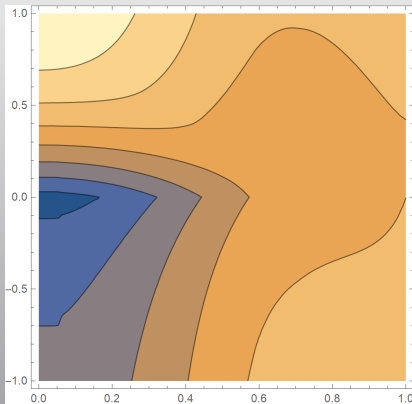
Powyższe wyrażenie jest osobiwe z powodu zawartej w φ f. eliptycznej II. Trzeba je „zregularyzować” zastępując $R(z_0)$ przez $R(z_0) + \epsilon$, $\epsilon \rightarrow 0$, oraz domnażając lewą stronę przez $R(z_0)^2$.



Efekt powyższej podejrzanej procedury pokazuje rysunek obok. Kształt okazuje się w przybliżeniu ściętą paraboloidą obrotową równaniu

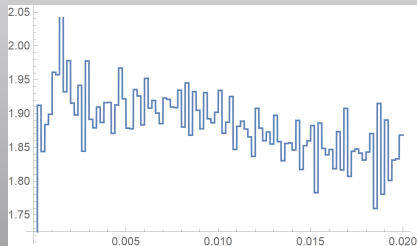
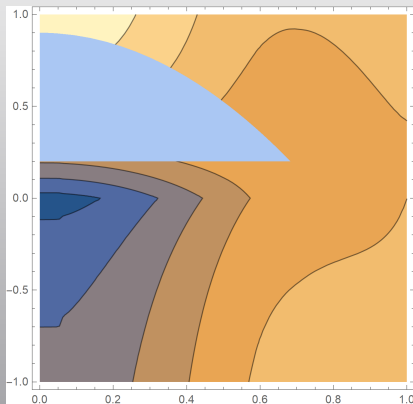
$$z \simeq \frac{7}{10} - \frac{3}{2} r^2, \quad r > 0, z > 0.$$

Aby uzyskać maksimum siły dwa takie „dzwonki” należy złączyć płaskimi podstawami. O ile siła jest większa niż pomiędzy dwoma kulami?



Wynik dla 2 ciał

Siła pomiędzy „dzwonekami” jest około $1.8\text{-}1.9 \times$ większa niż pomiędzy kulami. Gdyby kule mogły się przenikać maksimum wynosi $15/8 = 1.875$.



Wynik dla 2 ciał

Siła pomiędzy „dzwonekami” jest około $1.8\text{--}1.9 \times$ większa niż pomiędzy kulami. Gdyby kule mogły się przenikać maksimum wynosi $15/8 = 1.875$.

- ❶ jest możliwe wygenerowanie $\vec{g}$ większego niż dla kuli w geometrii osiowej, zarówno na biegunie jak i równiku,
- ❷ współczynnik „wzmocnienia” okazuje się niepraktycznie mały (1.026) aby komplikować eksperymenty
- ❸ dla dwóch ciał złączonych płaskimi podstawami siła okazuje się niemal 2x większa, ale...
- ❹ wątpliwy rachunek wariacyjny należałoby powtórzyć lub przynajmniej zweryfikować numerycznie
- ❺ znaleziony układ może okazać się nowym sposobem pomiaru G na orbicie — wystarczy pomiędzy ciała włożyć 3 czułe piezometry lub wykorzystać odpychający efekt Lifszycza-Casimira (zmierzyć szczelinę ?)
- ❻ efekt rozmiaru: wygenerowanie g skaluje się jak $M^{1/3}$, natomiast $F_{\max} \sim M^{4/3}$
- ❼ przyciąganie „dzwonków” o masie 100 kg powinno być odczuwalne palcem
- ❽ pole grawitacyjne pojedynczego „dzwonka” wytwarza „pułapkę grawitacyjną” od płaskiej strony: może udałoby się zmierzyć energię wiązania złapanej nano-kulki ?

- [1] <https://physics.stackexchange.com/questions/12703/maximal-gravity>
- [2] Xiao-Wei Wang, Yue Su The optimal shape of an object for generating maximum gravity field at a given point in space <https://arxiv.org/abs/1412.5541>
- [3] Lass, H.; Blitzer, L. The Gravitational Potential due to Uniform Disks and Rings, Celestial Mechanics, Volume 30, Issue 3, pp.225-228, <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1983CeMec..30..225L/abstract>
- [4] Precision measurement of the Newtonian gravitational constant, Chao Xue, Jian-Ping Liu, Qing Li, Jun-Fei Wu, Shan-Qing Yang, Qi Liu, Cheng-Gang Shao, Liang-Cheng Tu, Zhong-Kun Hu, Jun Luo National Science Review, Volume 7, Issue 12, December 2020, Pages 1803–1817, <https://doi.org/10.1093/nsr/nwaa165>

