

Choreografie, KAM-stabilność i dyfuzja Arnolda w problemie N-ciał

Tomasz Kapela

Instytut Informatyki i Matematyki Komputerowej
Uniwersytet Jagielloński w Krakowie

18 stycznia 2023

Problem N-ciał

$$m_i \ddot{q}_i = G \sum_{j \neq i} \frac{m_i m_j (q_j - q_i)}{\|q_i - q_j\|^{\alpha+2}} \quad \text{dla } i = 1, \dots, N$$

gdzie

$q_i \in \mathbb{R}^n$ - pozycja i-tego ciała

m_i - masa i-tego ciała

$\alpha = 1$ dla potencjału Newtonowskiego

$G = 6.6732 \times 10^{-11} \text{m}^3/\text{s}^2\text{kg}$

Problem N-ciał na płaszczyźnie po przeskalowaniu

$$\ddot{\mathbf{q}}_i = \sum_{j \neq i} \frac{(\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i)}{\|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j\|^3} \quad \text{dla } i = 1, \dots, N$$

gdzie

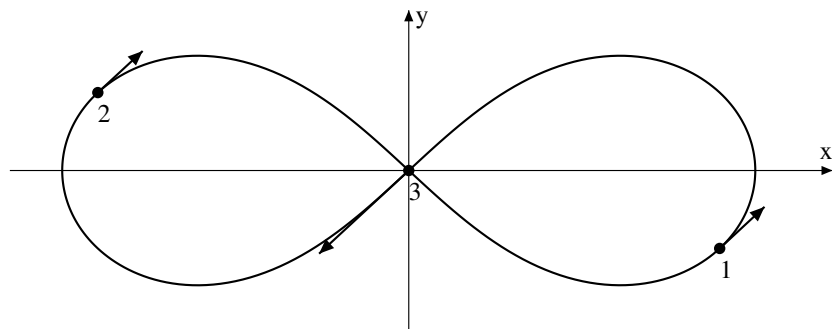
$$\mathbf{q}_i \in \mathbb{R}^2$$

$$m_i = 1$$

$$\alpha = 1$$

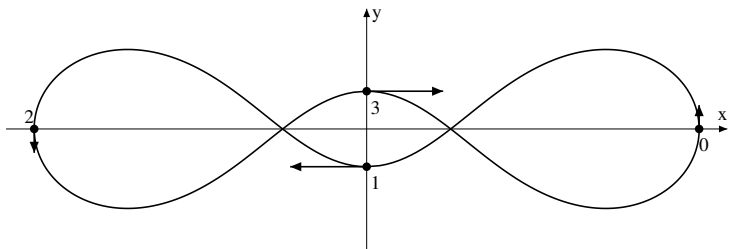
$$G = 1 \text{ m}^3/\text{s}^2\text{kg}$$

The Eight - słynna orbita w kształcie ósemki



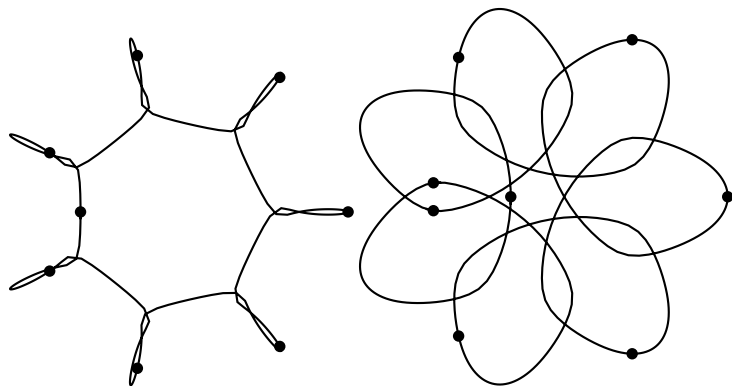
- Odkryta w 1994 przez C. Moore'a.
- Odkryta ponownie i udowodniona przez Chencinera i Montgomery'ego w 2000 r.

Orbita Gervera - Super Eight



T.K. , P.Zgliczyński, 2003: Komputerowo wspierany dowód istnienia.

Choreografie w problemie N-ciał



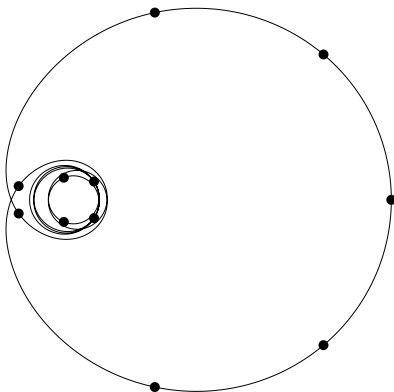
8 bodies choreographies

Rozpoczynając od roku 2000, Carles Simó znalazł numerycznie wiele choreografii dla różnej liczby ciał N (od 3 do kilkuset).

Definicja

Przez **choreografię** rozumiemy rozwiązanie problemu N-ciał, które

- nie ma kolizji
- wszystkie ciała poruszają się po jednej krzywej zamkniętej ze stałym przesunięciem fazowym.



11 bodies

Kolekcje choreografii

- Kolekcja animowanych choreografii
<https://personalpages.manchester.ac.uk/staff/j.montaldi/Choreographies/>
- Choreografie 3D (D. Ferrario)
<http://staff.matapp.unimib.it/ferrario/mov/index.html>
- Gregory T. Minton choreographies project
<http://gminton.org/research.html#choreo>

Poszukiwania choreografii

Minimalizujemy funkcjonal akcji

$$A(q) := \int_0^T L(q(t), \dot{q}(t)) dt$$

gdzie

$$L(q(t), \dot{q}(t)) = K(\dot{q}(t)) + U(q(t))$$

K - energia kinetyczna

$-U$ - energia potencjalna

$$U(q(t)) = G \sum_{j \neq i} \frac{m_i m_j}{\|q_i - q_j\|^\alpha}$$

[N-body program]

- Metody wariacyjne dają dowody istnienia w pewnych klasach krzywych ale często nie wiadomo jak wygląda minimalizator.
- Metody numeryczne dają warunki początkowe i pozwalają na symulacje.
- Większość choreografii silnie niestabilna.
- Potrzebna ścisła walidacja wyników obliczeń.

Metody wariacyjne

- 1 Ustalamy klasę krzywych Λ taką, że funkcjonal akcji jest koercywny.
- 2 Szukujemy (analitycznie) od dołu akcję dla krzywych zawierających kolizję przez prewną stałą M .
- 3 Znajdujemy krzywą testową w Λ z akcją mniejszą niż M .

Przykład: Chenciner, Montgomery 2000, Proof of the figure eight solution.

Problem zredukowano do tzw. sfery kształtów.

Jako Λ wybrano krzywe łączące trójkąty równoramienne z trójkątami zdegenowanymi.

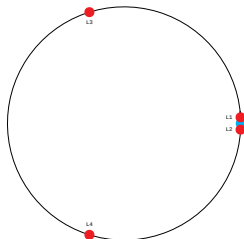
Akcja dla krzywej testowej była oszacowana ściśle używając arytmetyki przedziałowej.

Liniowa stabilność Ósemki

- Numeryczne oszacowania wartości własnych $\frac{\partial \varphi(x_0, T)}{\partial x}$ (C. Simó):

$$\lambda_{1,2} \approx 0.99859998 \pm 0.05289683i,$$

$$\lambda_{3,4} \approx -0.29759667 \pm 0.95469169i,$$



- T.K. & C.Simó, 2007 :

Komputerowo wspierany dowód liniowej stabilności Ósemki

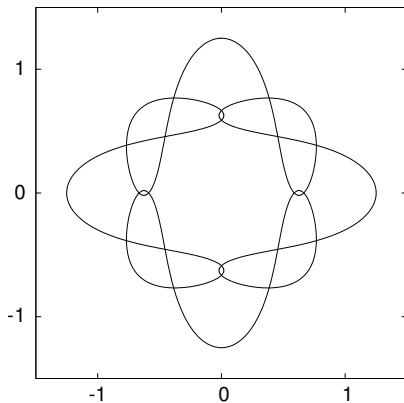
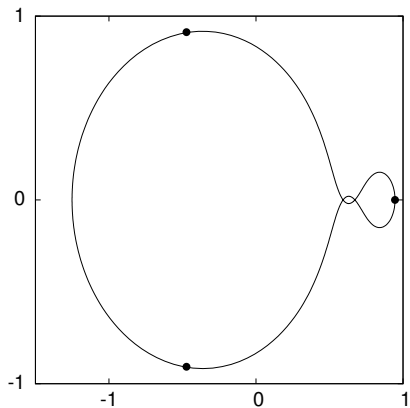
KAM stabilność Ósemki

- Simó znalazł w pobliżu Ósemki rozwiązania quasi-okresowe i okresowe o okresach będących wielokrotnością okresu Ósemki.
- większość orbit z momentem pędu równym 0, które rozpoczynają w pobliżu Ósemki pozostaje w pobliżu, a te które uciekają robią to "wolno".
- T.K. & C.Simó, 20017 :
Komputerowo wspierany dowód KAM stabilności Ósemki

Kontynuacja i bifurkacje

- kontynuacja ze względu na siłę przyciągania α
- kontynuacja przestrzenna
z Ósemki do orbity Lagrange'a
- kontynuacja ze względu na moment pędu
Rotujące Ósemki

Rotująca Ósemka dla $M \approx 0.4493$

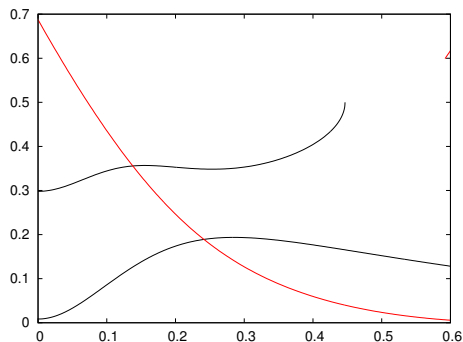


Lewy: w obracającym się układzie współrzędnych $\longrightarrow$ relatywna choreografia.

Prawy: w oryginalnym układzie współrzędnych $\longrightarrow$ choreografia.

Stabilność obracających się Ósemek

Argumenty α_1, α_2 wartości własnych $\exp(\pm 2\pi i \alpha_1), \exp(\pm 2\pi i \alpha_2)$ jako funkcja momentu pędu M .

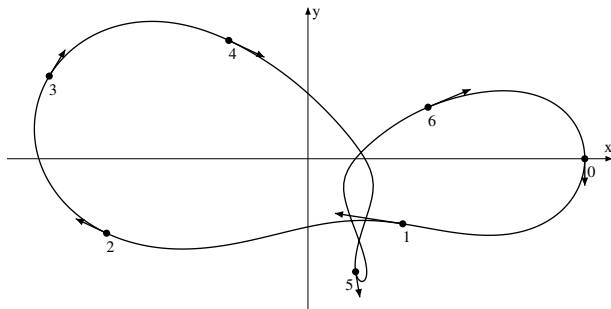


- dla $M = M_{pd} \approx 0.4467 \rightarrow$ podwojenie okresu,
- czerwona linia - minimalna odległość między ciałami.

Choreografie niesymetryczne

Większość znalezionych choreografii posiada jakąś symetrię.

Symetrie są wykorzystywane w dowodach wariacyjnych aby zapewnić brak kolizji dla minimalizatora.



T.K. & C.Simó, 2007 :

Komputerowo wspierany dowód istnienia choreografii niesymetrycznej dla 7 ciał.

Czy istnieją choreografie dla ciał różniących się masami?

Jeżeli istnieje choreografia o "nierównych" masach to można dokładnie w te same miejsca włożyć uśrednione masy i nadal otrzymamy choreografię.

Chenciner pokazał, że to jest niemożliwe dla mniej niż 7 ciał jeżeli założymy stałe przesunięcie fazowe.

Dla większej liczby ciał nic nie wiadomo.

Czy orbity w kształcie ósemki istnieją we wszechświecie?

Douglas Hoggie (2000) i Piotr Hut przeprowadzili eksperyment numeryczny polegający na rzucaniu w siebie parami mas o tych samych masach i obserwowaniu ile orbit w kształcie ósemki powstanie.

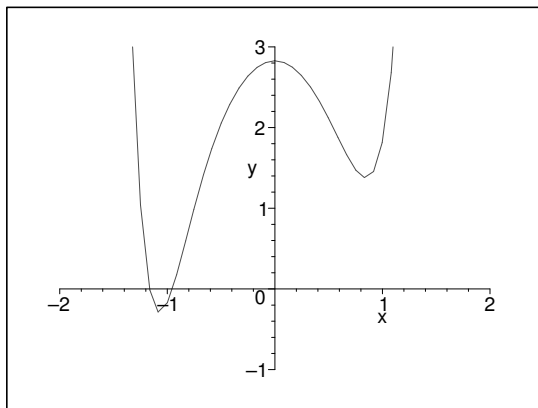
Na tej podstawie oszacowali, że liczba Ósemek w widzialnym wszechświecie mieści się między 1 a 100.

$$\begin{array}{c} \text{Analityczne Abstrakcyjne Twierdzenia} \\ + \\ \text{Ścisłe Oszacowania} \\ = \\ \text{Komputerowo Wspierane Dowody} \end{array}$$

Twierdzenia muszą mieć założenia np. w postaci inkluzji, nierówności.

Ścisłe oszacowania muszą brać pod uwagę wszelkie błędy obliczeń.

Prosty przykład



Czy istnieją rzeczywiste rozwiązania równania

$$F(x) = x^8 + x^5 - 3x^2 + \sqrt{8} = 0$$

$$x_1 \approx -1.164443372$$

$$x_2 \approx -0.9525383787$$

Prosty przykład

$$F(x) = x^8 + x^5 - 3x^2 + \sqrt{8} = 0$$

Ścisłe oszacowania:

$$F([-1]) \in [-1]^8 + [-1]^5 - 3 \cdot [-1]^2 + [2.82, 2.83] = [-0.18, -0.17] < 0$$

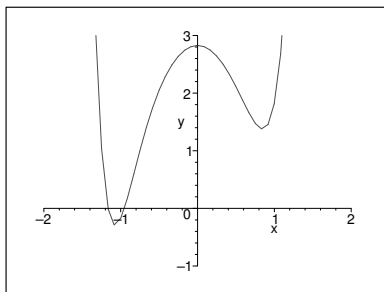
$$F([0]) \in [0]^8 + [0]^5 - 3 \cdot [0]^2 + [2.82, 2.83] = [2.82, 2.83] > 0.$$

Analityczne Twierdzenia:

Wielomiany są ciągłe.

Ciągłe funkcje mają własność Darbou.

Wniosek: $F(x^*) = 0$ dla pewnego $x^* \in (-1, 0)$.



Arytmetyka przedziałowa

Wszystkie obliczenia na liczbach zmiennoprzecinkowych są zamienione na operacje na **domkniętych przedziałach reprezentowalnych**.

- $[1, 3] + [3, 17] = [4, 20]$
- $[2, 3] - [-3, 4] = [-2, 6]$
- $[-1, 1] \cdot [3, 4] = [-4, 4]$
- $1/3 = [0.33333, 0.33334]$

It can be extended to all basic functions

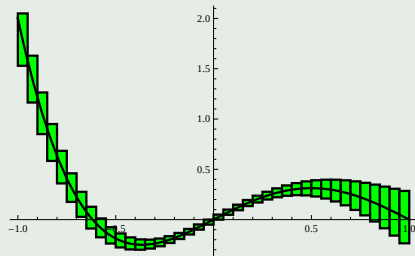
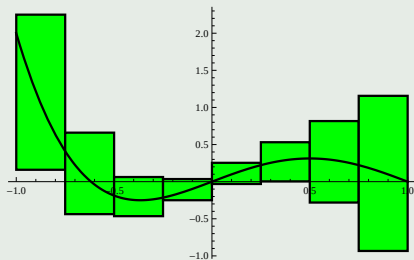
$$f \in \{\sin, \cos, \exp, \ln, \dots\}$$

such that

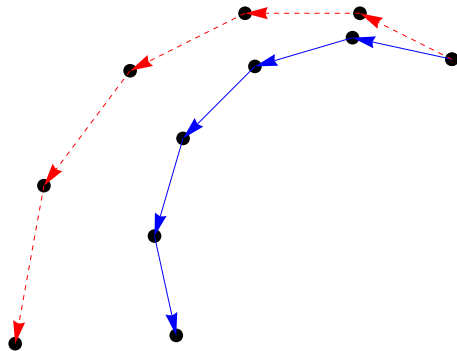
$$f([a, b]) \subset [f]([a, b]).$$

Example

$$f(x) = x^4 - 2x^3 + x$$



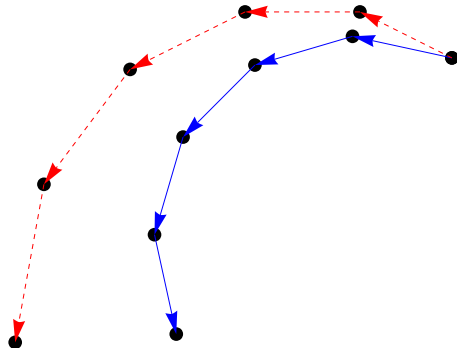
(Nie)ściśła analiza numeryczna.



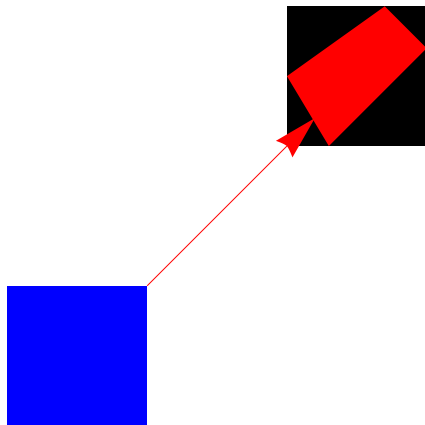
dokładna trajektoria

trajektoria z metody numerycznej

(Nie)ściśła analiza numeryczna.



dokładna trajektoria
trajektoria z metody numerycznej



zbiór warunków początkowych
dokładny obraz zbioru poprzez
odwzorowanie (np. potok)
przykładowy wynik zwrócony
przez ścisłą metodę

Miejsca zerowe funkcji

Theorem (przedziałowa metoda Newtona)

- $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ klasy $\mathcal{C}^1$
- $X \subset \mathbb{R}^n$ - zwarty, wypukły, $x_0 \in X$

Określamy przedziałowy operator Newtona

$$N(f, X, x_0) = x_0 - [Df(X)]_I^{-1}f(x_0)$$

- jeśli $N(f, X, x_0) \subset \text{int}X$ to f ma dokładnie jedno zero w X .
Ponadto, jeśli x_* jest tym zerem, to $x_* \in N(f, X, x_0)$
- jeśli $N(f, X, x_0) \cap X = \emptyset$ to f nie ma zer w X

Układ Hamiltonowski

$$\dot{q} = H_p \quad \dot{p} = -H_q,$$

gdzie Hamiltonian $H(q, p) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ jest gładką funkcją zdefiniowaną na otwartym obszarze $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}$

Dla układów Hamiltonowskich asymptotyczna stabilność nie jest możliwa!

Stabilność (w sensie) KAM - rozwiązanie jest całkowicie eliptyczne i w każdym otoczeniu istnieje zbiór, nigdzie gęsty ale o dodatniej mierze, takich punktów, które zachowują się w sposób regularny, quasi-okresowy.

T.K, Carles Simó, Rigorous KAM results around arbitrary periodic orbits for Hamiltonian Systems, Nonlinearity, 2017.

Metoda dowodzenia KAM-stabilności

We consider a Hamiltonian with $n + 1$ degrees of freedom.
For given section the Poincaré map $\mathcal{P}$ is a symplectic map in dimension $2n$.

Steps to prove existence and KAM stability of the unique fixed point of $\mathcal{P}$ near approximate fixed point x_0 :

- (1) Proof of the existence of the unique fixed point.
Rigorous estimates of initial conditions.
- (2) Proof of the linear stability.
- (3) Computation of a rigorous Birkhoff normal form.
- (4) Check of an appropriate non-degeneracy condition.

Dowód istnienia orbity okresowej

Poniższe warunki są równoważne

- punkt x należy do orbity okresowej,
- x jest punktem stałym o odwzorowania Poincare $\mathcal{P}$,
- $F(x) = \mathcal{P}(x) - x = 0$

Stosujemy przedziałową metodę Newtona dla F .

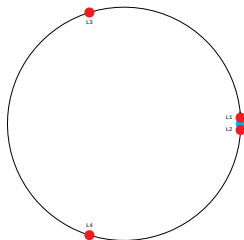
Jeżeli ściśle oszacowania dla odpowiednio dobranego x pozwalają zweryfikować, że

$$N(x_0, x, F) = x_0 - \text{hull}(DF(x))^{-1}F(x_0) \subset x$$

to otrzymujemy ściśle oszacowania na warunki początkowe orbity okresowej.

Liniowa stabilność Ósemki

- Dla Ósemki $\frac{\partial \mathcal{P}(x_0)}{\partial x}$ jest macierzą 4×4 .
- Oszacowania wartości własnych $\frac{\partial \mathcal{P}(x_0)}{\partial x}$ (C. Simó):
 $\lambda_{1,2} \approx 0.99859998 \pm 0.05289683i$,
 $\lambda_{3,4} \approx -0.29759667 \pm 0.95469169i$,

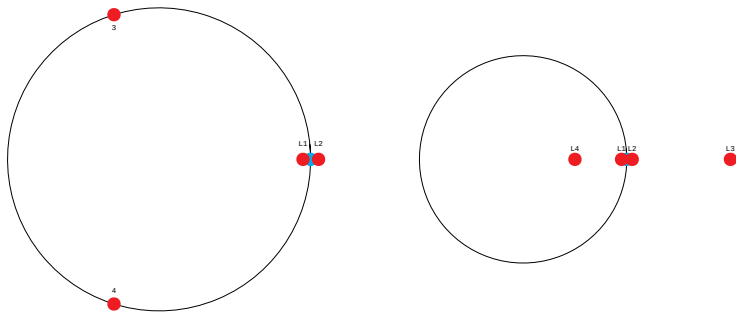


- Ścisłe oszacowania wartości własnych nie wystarczają!
- Musimy pokazać, że wszystkie wartości własne są na kole jednostkowym!
- Do tego celu używamy oszacowań i symplektyczności!

Possible cases

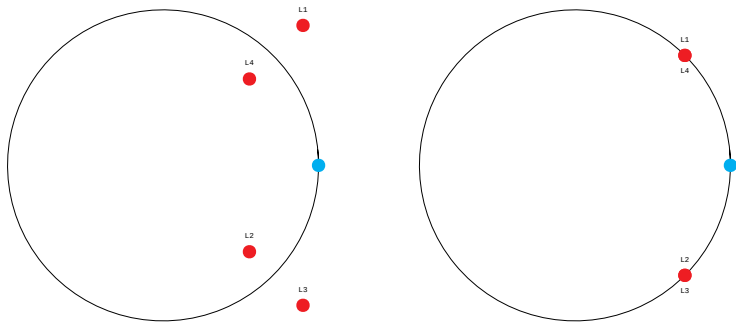
If λ is eigenvalue of symplectic matrix A then also $\bar{\lambda}$, λ^{-1} , $\bar{\lambda}^{-1}$ are eigenvalues of A .

(S1) some of $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ are real and $\lambda_1\lambda_2 = 1$, $\lambda_3\lambda_4 = 1$,



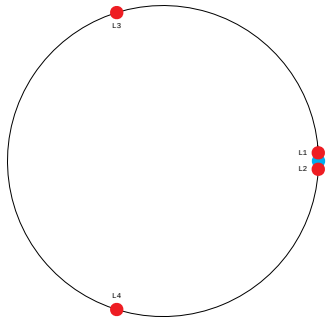
Possible cases

(S2) $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ are not real and $\lambda_1 = \lambda_2^{-1} = \bar{\lambda}_3 = \bar{\lambda}_4^{-1}$,



Possible cases

(S3) $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ are different, not real and $\lambda_1 = \lambda_2^{-1} = \bar{\lambda}_2$,
 $\lambda_3 = \lambda_4^{-1} = \bar{\lambda}_4$,



Taylor expansion of Poincaré Map

We use $\mathcal{C}^r$ -Lohner algorithm from CAPD library to obtain Taylor series of Poincaré Map $\mathcal{P}$ in the fixed point x to given order r

$$T(x) = \sum_{|k| \leq r} c_k x^k$$

We transform this series to the Birkhoff normal form

$$z \mapsto \Lambda z + T_r(z),$$

where

- Λ is a diagonal matrix $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \bar{\lambda}_n)$,
- $T_r(z)$ contains only terms corresponding to **unavoidable resonances** up to degree r .

KAM non-degeneracy condition

In our case the map in BNF up to order 3 can be expressed as

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \dots \\ z_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} z_1 e^{2\pi i (\alpha_1 + d_{11}|z_1|^2 + d_{12}|z_2|^2 + \dots + d_{1n}|z_n|^2)} \\ z_2 e^{2\pi i (\alpha_2 + d_{21}|z_1|^2 + d_{22}|z_2|^2 + \dots + d_{2n}|z_n|^2)} \\ \dots \\ z_n e^{2\pi i (\alpha_n + d_{n1}|z_1|^2 + d_{n2}|z_2|^2 + \dots + d_{nn}|z_n|^2)} \end{pmatrix},$$

where the d_{ij} are real and symmetrical and $\lambda_j = \exp(i 2\pi \alpha_j)$.

The non-degeneracy KAM condition amounts to check that the determinant δ of the matrix $D = (d_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ (the torsion) is non-zero.

KAM stability of the Eight

The figure eight choreography and rotating eights for some selected values of M exist, are locally unique, linearly stable and KAM non-degeneracy conditions are satisfied.

For the figure eight orbit we obtained

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} z_1 e^{i 2\pi(\alpha_1 + d_{11}|z_1|^2 + d_{12}|z_2|^2)} \\ z_2 e^{i 2\pi(\alpha_2 + d_{21}|z_1|^2 + d_{22}|z_2|^2)} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

where

$$d_{11} \in -37.6_{09}^{10} + i_{-0.001}^{+0.001}, \quad d_{12}, d_{21} \in 3.51_0^1 + i_{-0.001}^{+0.001}, \quad d_{22} \in 0.08_1^2 + i_{-0.001}^{+0.001}.$$

$$\text{Determinant } \delta \in -15.37_2^3 + i_{-0.001}^{+0.001} \neq 0.$$

For selected rotating eight

- $M = 0.0048828125$: $\delta \in -15.49_6^7 + i_{-0.001}^{+0.001}$
- $M = 0.1484375$: $\delta \in -11.61_7^8 + i_{-0.001}^{+0.001}$

W 1964 roku, Vladimir Igorevich Arnold opublikował pracę zawierającą przykład układu, który

- jest stabilny (w języku mechaniki klasycznej, był w pełni całkowny). O takich systemach wiadomo, że nie mogą w sposób radykalny zmienić swojej struktury i stać się niestabilnymi pod wpływem drobnej perturbacji.
- sperturbowany system wykazuje oznaki niestabilności.
- nawet przy najmniejszej perturbacji może w systemie dojść do zmiany energii dowolnie wielkich rozmiarów.
- Co więcej, zmiana energii zachowuje się w tym przykładzie w sposób chaotyczny.

Dyfuzja Arnolda w problemie 3-ciał

Maciej J. Capinski, Marian Gidea, Rafael de la Llave Arnold diffusion in the planar elliptic restricted three-body problem: mechanism and numerical verification

- Pokazują istnienie dyfuzji Arnolda wokół orbit Lapunowa L2.

Dziękuję za uwagę.