Rozwiązanie równania oscylatora harmonicznego

Motywacją do zebrania różnych sposobów rozwiązania równania oscylatora harmonicznego:

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -kx(t) \tag{1}$$

jest notorycznie zadawane przez studentów pytanie: jak rozwiązać (1).

Równanie pojawia się wielokrotnie w wielu działach fizyki i jest standardowym przykładem stosowania różnych metod matematycznych fizyki (MMF). Zapisywane jest w kilku równoważnych równaniu (1) postaciach, np:

$$\ddot{x} + \omega^2\, x = 0, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{2}$$

Niewiadomą jest funkcja $x(t)$, przy czym często pomija się argument funkcji, który *nie występuje* jawnie w równaniu (2). Fakt ten jest okolicznością pozwalającą na obniżenie rzędu równania[1], o czym napiszę dalej. Problem rozwiązania (1) można sformułować słownie w następujący sposób: **jaka funkcja po dwukrotnym zróżniczkowaniu da samą siebie ze znakiem minus, dodatkowo pomnożoną przez pewną stała?** Odpowiedź na takie pytanie jest wiadoma każdemu studentowi, który potrafi różniczkować: taką własność mają funkcje sin (sinus) i cos (kosinus). Parafrazując Lema, można powiedzieć, że taka odpowiedź zadowoli, być może, laika, ale nie jest wystarczająca dla umysłu ścisłego. Wypełnieniem tej próżni jest w zamierzeniu poniższy tekst. Przedstawiam dziewięć istotnie różnych sposobów „rozwiązania" równania (2).

1 Ansatz

Równanie (2) jest na tyle ważne, że jego rozwiązanie każdy szanujący się fizyk powinien umieć podać z pamięci. Gdyby ogłoszono plebiscyt na 10 najważniejszych równań fizyki, równanie (2) wraz z jego rozwiązaniem z pewnością znalazłoby się na tej liście. Trzy podstawowe postacie rozwiązania ogólnego to:

$$x(t) = a\cos\omega t + b\cos\omega t \tag{3a}$$

$$x(t) = A\sin(\omega t + \phi) \quad \text{lub rzadziej:} \quad x(t) = A\cos(\omega t + \phi). \tag{3b}$$

oraz postać zespolona:

$$x(t) = \alpha\, e^{i\omega t} + \beta\, e^{-i\omega t}. \tag{3c}$$

Aby postać (3c) dawała rozwiązanie **rzeczywiste** [2], liczby zespolone α i β muszą być sprzężone: $\beta = \bar{\alpha}$.

[1] Rzędem równania różniczkowego zwyczajnego nazywany stopień najwyższej pochodnej w równaniu. Dla (1) rząd wynosi dwa.

[2] Równanie (2) z matematycznego punktu widzenia może być traktowane jako równanie o niewiadomej *zepolonej* funkcji argumentu rzeczywistego. Fakt ten wykorzystuje się w fizyce i elektrotechnice celem ułatwienia obliczeń.

Dla przykładu, sprawdzimy postać (3b). Obliczamy pierwszą pochodną po t:

$$\dot{x} \equiv (A \sin \omega t + \phi)' = A(\sin \omega t + \phi)' = A \cos (\omega t + \phi) \cdot (\omega t + \phi)' = A\omega \cos (\omega t + \phi)$$

oraz drugą pochodną (tj. pochodną pierwszej pochodnej):

$$\ddot{x} \equiv (A\omega \cos \omega t + \phi)' = -A\omega^2 \sin (\omega t + \phi).$$

Po wstawieniu do (2) otrzymujemy:

$$-A\omega^2 \sin (\omega t + \phi) + \omega^2 \cdot A \sin (\omega t + \phi) = 0,$$

bo obydwa wyrazy upraszczają się. Analogicznie można sprawdzić prawdziwość postaci (3a).

Użycie postaci zespolonej (3c) wymaga komentarza. Równanie (2) jest liniowe, czyli każda kombinacja liniowa rozwiązań $x_1(t)$ i $x_2(t)$ też jest rozwiązaniem:

$$x(t) = \lambda_1 x_1(t) + \lambda_2 x_2(t), \tag{4}$$

co łatwo sprawdzić wstawiając (4) do (2):

$$(\lambda_1 x_1(t) + \lambda_2 x_2(t))'' + \omega_2 (\lambda_1 x_1(t) + \lambda_2 x_2(t)) = \lambda_1 \ddot{x_1} + \lambda_2 \ddot{x}_2 + \lambda_1 \omega^2 x_1 + \lambda_2 \omega_2 x_2 =$$

$$= \lambda_1 \left(\ddot{x}_1 + \omega^2 \, \ddot{x}_1\right) + \lambda_2 \left(\ddot{x}_2 + \omega^2 \, \ddot{x}_2\right) = \lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 0 = 0,$$

bo funkcje x_1 i x_2 z założenia spełniają (2).

Jeżeli teraz wybierzemy $\lambda_1 = 1$ oraz $\lambda_2 = i$, to możemy rozwiązać równanie **zespolone** (2), a na koniec wziąć część rzeczywistą. Jeżeli potraktujemy (dla uproszczenia rachunku) liczby α i β w 3c jako zespolone:

$$\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2, \qquad \beta = \beta_1 + i\beta_2,$$

to otrzymamy:

$$Re\left[(\alpha_1 + i\alpha_2)e^{i\omega t} + (\beta_1 + i\beta_2)e^{-i\omega t}\right] = (\alpha_1 + \beta_1)\, \cos \omega t + (\beta_2 - \alpha_2)\, \sin \omega t,$$

gdzie wykorzystano fundamentalną tożsamość:

$$e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi. \tag{5}$$

Równanie (5) znane jest jako wzór Eulera.

2 Równanie charakterystyczne dla problemu liniowego

Ogólna metoda rozwiązywania równań i układów **liniowych** równań różniczkowych zwyczajnych opiera się o podstawienie:

$$x(t) = e^{\lambda t}. \tag{6}$$

Postawienie (6) sprowadza równanie różniczkowe do równania algebraicznego, które daje tyle różnych[3] wartości λ, ile wynosi rząd równania. Równania odpowiadające różnym wartościom λ są liniowo niezależne, a rozwiązanie ogólne będzie miało postać:

$$x(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}. \tag{7}$$

Dla równania (2) procedura wygląda następująco. Obliczamy pierwszą i drugą pochodną:

$$\dot{x} = \lambda e^{\lambda t}, \quad \ddot{x} = \lambda^2 e^{\lambda t}. \tag{8}$$

Warto zauważyć, że różniczkowanie eksponenty sprowadza się w tym przypadku do mnożenia przez λ. Wstawiając (8) do (2) otrzymujemy:

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + \omega^2 e^{\lambda t} = \left(\lambda^2 + \omega^2\right) e^{\lambda t} = 0.$$

Z powyższego otrzymujemy *równanie charakterystyczne* o niewiadomej λ:

$$\lambda^2 = -\omega^2.$$

Jest to równanie kwadratowe z $\Delta < 0$, posiadające dwa rozwiązania urojone:

$$\lambda_1 = i\omega, \ \lambda_2 = -i\omega. \tag{9}$$

Wstawiając (9) do (7) otrzymujemy rozwiązanie ogólne, identyczne z (3c).

3 Zasada zachowania energii

Równanie (2) nie zawiera „czasu” t w sposób jawny. Oznacza to możliwość obniżenia rzędu równania o jeden. Z fizycznego punktu widzenia w układzie (1) jest zachowana energia. Mnożymy (1) przez $\dot{x}$ i przenosimy wszystkie składniki na lewą stronę:

$$m\ddot{x}\dot{x} + kx\dot{x} = 0.$$

Całkujemy obustronnie po czasie ($\int \ldots dt$):

$$\int m\dot{x}\ddot{x}\, dt + \int kx\, \dot{x}\, dt = E \tag{10}$$

gdzie wszystkie stałe całkowania zostały przeniesione na prawą stronę i oznaczone literą E. Całki (10) są łatwe do obliczenia, pomimo że zawierają *nieznaną* (dowolną) funkcję czasu $x(t)$. W pierwszej stosujemy podstawienie $u = \dot{x}(t)$, a w drugiej $w = x(t)$:

$$\dot{x}(t) = u, \rightarrow \ddot{x}dt = du, \quad x(t) = w, \rightarrow \dot{x}dt = dw,$$

[3] Przypadek, gdy wartości λ powtarzają się, wymaga dokładniejszego zbadania. Zob. np. I.N. Bronsztejn, K.A. Siemiendiajew, Matematyka. Poradnik encyklopedyczny, dowolne wydanie, Czesc IV, Rozdz. 5. Układy równań różniczkowych liniowych o stałych współczynnikach.

czyli:

$$m \int u\, du + k \int w\, dw = E, \quad \rightarrow \quad m\frac{u^2}{2} + k\frac{w^2}{2} = E.$$

Ostatecznie otrzymujemy:

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = E. \tag{11}$$

Równanie (11) każdy fizyk powinien potrafić napisać natychmiast jako sumę energii kinetycznej i potencjalnej.

Wychodząc od (11) można rozwiązać (1). Przepisujemy (11) podstawiając $\dot{x} \equiv dx/dt$:

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2E - kx^2}{m}}.$$

Powyższe jest równaniem o zmiennych rozdzielonych. Przenosimy wszystkie wyrazy zawierające x (w tym dx) na lewą stronę, natomiast t na prawą:

$$\frac{dx}{\sqrt{\frac{2E-kx^2}{m}}} = dt.$$

Całkujemy obustronnie:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2E-kx^2}{m}}} = \int dt.$$

Aby obliczyć całkę po prawej stronie przekształcamy:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2E-kx^2}{m}}} = \sqrt{\frac{m}{2E}} \int \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{k}{2E}x^2}}.$$

Podstawiamy:

$$\sqrt{\frac{k}{2E}}\, x = u, \quad \rightarrow \quad dx = \sqrt{\frac{2E}{k}}\, du$$

co daje:

$$\sqrt{\frac{m}{k}} \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \sqrt{\frac{m}{k}} \arcsin u.$$

Rozwiązanie ma postać (stała całkowania została oznaczona przez ϕ):

$$\arcsin u = \sqrt{\frac{k}{m}}\, t + \phi.$$

Podstawiając $\sqrt{k/m} = \omega$ i $u = x\, \sqrt{k/(2E)}$, dostajemy ostatecznie:

$$x(t) = \sqrt{\frac{2E}{k}}\, \sin(\omega\, t + \phi). \tag{12}$$

Przy okazji dostajemy jako „bonus” znany związek amplitudy drgań z energią:

$$A = \sqrt{\frac{2E}{k}}, \quad \text{czyli:} \quad E = \frac{1}{2}\, kA^2.$$

4 Obniżenie rzędu równania

Przepisujemy równanie (1) wprowadzając prędkość $v = \dot{x}$:

$$m\frac{dv}{dt} = -kx.$$

W powyższym równaniu dokonujemy zamiany zmiennej niezależnej, z t na x:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt},$$

ale:

$$\frac{dx}{dt} = v,$$

i ostatecznie:

$$mv\frac{dv}{dx} = -kx.$$

Otrzymaliśmy równanie pierwszego rzędu o zmiennych rozdzielonych:

$$mvdv = -kxdx, \qquad \rightarrow \qquad m\int vdv = -k\int xdx, \qquad \rightarrow \quad m\frac{v^2}{2} = -k\frac{x^2}{2} + const.$$

Dalszy sposób postępowania jest identyczny z przedstawionym poniżej równania (11).

5 Metoda zespolona II

Opisany sposób pochodzi od Landaua i Lifszyca. Przekształcamy (2):

$$\ddot{x} + \omega^2\, x = \frac{d}{dt}\left(\dot{x} - i\omega x\right) + i\omega x + \omega^2 x = \frac{d}{dt}\left(\dot{x} - i\omega x\right) + i\omega\left(\dot{x} - i\omega x\right).$$

Podstawiamy za wyrażenia w nawiasach:

$$\zeta = \dot{x} - i\omega x,$$

co daje:

$$\dot{\zeta} + i\omega\zeta = 0. \tag{13}$$

Równanie (13) jest równaniem pierwszego rzędu o zmiennych rozdzielonych. Jego rozwiązanie jest proste do uzyskania:

$$\frac{d\zeta}{dt} = -i\omega\zeta, \quad \rightarrow \quad \frac{d\zeta}{\zeta} = -i\omega dt.$$

Całkując obustronnie otrzymujemy:

$$\int\frac{d\zeta}{\zeta} = \ln\zeta = -i\omega t + const,$$

czyli:
$$\zeta(t) = A\, e^{-i\omega t}.$$

Teraz musimy rozwiązać równanie **niejednorodne**:
$$\dot{x} - i\omega x = Ae^{-i\omega t}. \tag{14}$$

Rozwiązanie równania (14) składa się z dwóch członów: rozwiązania równania *jednorodnego*:
$$\dot{x} - i\omega x = 0 \tag{15}$$

i **dowolnego** (jakiegokolwiek) rozwiązania równania *niejednorodnego* (14). Rozwiązanie (15) można uzyskać identycznie jak (13), co daje:
$$x(t) = Be^{i\omega t}. \tag{16}$$

Rozwiązanie r. niejednorodnego otrzymamy **metodą uzmienniania stałych**. Zakładamy, że B w (16) jest funkcją czasu $B \equiv B(t)$, i wstawiamy do (14):
$$\dot{B}e^{i\omega t} + Bi\omega e^{i\omega t} - i\omega Be^{i\omega t} = Ae^{-i\omega t},$$

po uproszczeniu:
$$\dot{B}e^{i\omega t} = Ae^{-i\omega t}, \quad \rightarrow \quad \dot{B} = Ae^{-2i\omega t}.$$

Całkując obustronnie ostatnie równanie po czasie dostajemy:
$$B(t) = \int Ae^{-2i\omega t}\, dt = -\frac{A}{2i\omega}e^{-2i\omega t} + const.$$

Stałą bierzemy równą zeru, bo interesuje nas jakiekolwiek rozwiązanie. Ostatecznie dostajemy:
$$x(t) = Be^{i\omega t} - \frac{A}{2i\omega}e^{-2i\omega t}e^{i\omega t} = \alpha e^{i\omega t} + \beta e^{-i\omega t}.$$

gdzie podstawiłem $B = \alpha, -A/(2i\omega) = \beta$.

6 Metoda szeregów potęgowych

W tej części, aby nie zaciemniać procedury, rozważymy postać (2) z $\omega = 1$:
$$\ddot{x} + x = 0, \quad \text{z warunkami początkowymi:} \quad x(0) = 1, \dot{x}(0) = 0.$$

Rozwiązania poszukujemy w postaci **szeregu potęgowego**:
$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

gdzie a_n to nieznane liczby. Obliczamy pochodne:

$$\dot{x} = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \quad \ddot{x} = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}.$$

Przenumerowujemy pierwszą sumę:

$$\ddot{x} = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n$$

Wstawiając do równania otrzymujemy:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2}\, x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+2)(n+1)\, a_{n+2} + a_n\right] x^n = 0.$$

Aby wyrażenie po lewej stronie było równe zero tożsamościowo, wszystkie współczynniki w nawiasach muszą być równe zeru:

$$(n+2)(n+1)\, a_{n+2} + a_n. \tag{17}$$

Otrzymaliśmy **równanie rekurencyjne**, które notabene wcale nie jest specjalnie łatwiejsze do rozwiązania niż różniczkowe. W tym przypadku jest to dosyć łatwe. Aby rozpocząć iterację (17) potrzebujemy podać dwa pierwsze wyrazy ciągu: a_0 i a_1. Korzystając z warunków początkowych dostajemy:

$$x(0) = a_0, \qquad \dot{x}(0) = a_1.$$

Bierzemy $a_0 = 1$ i $a_1 = 0$. Kolejne wyrazy ciągu (17) to:

$$a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = -\frac{a_0}{1 \cdot 2} = -\frac{1}{2}, a_3 = 0, a_4 = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}, \ldots$$

Widać, że nieparzyste wyrazy ciągu są równe zeru, a parzyste:

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n}{(2n)!}.$$

Suma:

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = \cos x.$$

7 Metoda macierzowa

Rozwiązanie zagadnienia początkowego równania oscylatora harmonicznego można uzyskać sprowadzając problem do wektorowego równania liniowego pierwszego rzędu.

Zapisujemy (2) (używając podstawienia $\dot{x} = v$, tj. prędkości) jako układ r.r.liniowych I rzędu:

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -\omega^2 x \end{cases} \tag{18}$$

lub równoważnie, w postaci macierzowej:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix}.$$

Ponieważ rozwiązaniem równania:

$$\dot{y} = A\, y,$$

z warunkiem początkowym $y(0) = y_0$ jest:

$$y(t) = y_0\, e^{At},$$

analogicznie możemy poprawnie napisać rozwiązanie dowolnego układu r. liniowych I rzędu:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie zagadnienia początkowego $\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0$ to:

$$\mathbf{X}(t) = e^{\mathbf{A}\, t} \cdot \mathbf{X}_0.$$

Dla oscylatora harmonicznego macierz $\mathbf{A}$ to:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix}$$

i głównym problemem staje się obliczenie wyrażenia:

$$e^{\begin{bmatrix} 0 & t \\ -\omega^2\, t & 0 \end{bmatrix}}$$

Obliczenie eksponenty macierzy jest możliwe z definicji:

$$e^{\mathbf{A}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \mathbf{A}^n$$

lub poprzez diagonalizację. Więcej szczegółów można znaleźć tutaj: [PDF]

Wynik końcowy to:

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t)/\omega \\ -\omega \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{bmatrix},$$

a rozwiązanie równania oscylatora harmonicznego:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ v(t) \end{bmatrix} = \exp\left(\mathbf{A}\, t\right) \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ v_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \cos\left(\omega t\right) + \frac{v_0}{\omega} \sin\left(\omega t\right) \\ v_0 \cos\left(\omega t\right) - x_0\, \omega \sin\left(\omega t\right) \end{bmatrix}.$$

8 Przekształcenie kanoniczne

Hamiltonian oscylatora harmonicznego można zapisać w postaci:

$$\mathcal{H}(p,q) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}\, m\omega^2\, q^2. \tag{19}$$

Równania kanoniczne Hamiltona mają postać:

$$\dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q}, \qquad \dot{q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p},$$

czyli:

$$\dot{p} = -m\omega^2\, q, \qquad \dot{q} = \frac{p}{m}.$$

Znajdziemy transformację kanoniczną oryginalnego Hamiltonianu, prowadzącą do bardzo prostej postaci. Korzystając z jedynki trygonometrycznej, postulujemy transformację postaci:

$$p = \lambda f(P)\cos Q, \quad q = f(P)\,\sin Q.$$

Ponieważ transformacja nie zależy od czasu, nowy Hamiltonian ma postać po prostu równą:

$$\mathcal{H}'(P,Q) = \mathcal{H}(p(P,Q), q(P,Q)) = \frac{\lambda^2 f(P)^2\cos^2 Q}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 f(P)^2 \sin^2 Q =$$

$$= f(P)^2 \left(\frac{\lambda^2}{2m}\cos^2 Q + \frac{1}{2} m\omega^2 \sin^2 Q \right).$$

Aby skorzystać z jedynki trygonometrycznej, musi zachodzić:

$$\frac{\lambda^2}{2m} = \frac{1}{2} m\omega^2, \quad \text{czyli} \quad \lambda = m\omega.$$

Aby transformacja $(p,q) \to (P,Q)$ była kanoniczna musi zachodzić:

$$\{p,q\}_{P,Q} = 1,$$

gdzie po lewej stronie mamy nawias Poissona liczony względem nowych zmiennych (P,Q).

Obliczamy:

$$\{p,q\}_{P,Q} = \frac{\partial p}{\partial P}\frac{\partial q}{\partial Q} - \frac{\partial p}{\partial Q}\frac{\partial q}{\partial P} = m\omega f'(P)\cos Q \cdot f(P)\cos Q - (-m\omega f(P)\cos Q)\cdot f'(P)\sin Q =$$

$$= m\omega f(P) f'(P)(\cos^2 Q + \sin^2 Q) = m\omega f(P) f'(P)$$

Aby tranformacja była kanoniczna, musi więc zachodzić:

$$m\omega f(P) f'(P) = 1.$$

Rozwiązujemy równanie różniczkowe na $f(P)$:

$$m\omega f\frac{df}{dP} = 1, \quad f df = \frac{dP}{m\omega},$$

całkując obustronnie dostajemy:

$$\frac{1}{2}f^2 = \frac{P}{m\omega} + const,$$

przyjmujemy stałą całkowania równą zeru i dostajemy:

$$f(P) = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}}.$$

Nowym Hamiltonianem jest:

$$\mathcal{H}'(P,Q) = \omega P.$$

Równania kanoniczne przyjmują prostą postać:

$$\dot{P} = 0, \quad \dot{Q} = \omega$$

a ich rozwiązanie to:

$$P(t) = P_0, \quad Q(t) = \omega t + \phi.$$

Transformując z powrotem do funkcji (p,q) otrzymujemy:

$$p(t) = \sqrt{2m\omega P_0}\,\cos(\omega t + \phi), \qquad q(t) = \sqrt{\frac{2P_0}{m\omega}}\,\sin(\omega t + \phi).$$

Warto zauważyć, że skoro ωP jest Hamiltonianem, to $\omega P_0 = E$ jest zachowaną energią, i wzór na $q(t)$ jest identyczny wyprowadzonym wyżej wzorem (12) ($m\omega^2 = k$).

9 Równanie Hamiltona-Jacobiego

Rozwiązanie równań ruchu układu opisanego pewnym hamiltonianem, jest równoważne szukaniu rozwiązań (cząstkowego) równania Hamiltona-Jacobiego:

$$\frac{\partial S(t,x)}{\partial t} + \mathcal{H}\left(\frac{\partial S(t,x)}{\partial x}, x\right) = 0.$$

Dla oscylatora harmonicznego, hamiltonian ma postać (19), i podstawiając do niego $p = \partial S/\partial x$ dostajemy:

$$\frac{\partial S(t,x)}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S(t,x)}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 = 0. \tag{20}$$

Rozwiązania szczególnego (całki zupełnej) szukamy w postaci rozseparowanej:

$$S(t,x) = -Et + s(x).$$

Wstawiając powyższe wyrażenie do (20) otrzymujemy:

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{ds(x)}{dx}\right)^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 = E.$$

Powyższe jest równaniem zwyczajnym o zmiennych rozdzielonych. Jego rozwiązanie to:

$$s = \int \sqrt{2mE - m^2\omega^2 x^2}\, dx.$$

Całka jest typu:

$$\int \sqrt{1-x^2}\, dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x\right),$$

co ładnie „wyprowadza” Wolfram Alpha:
http://www.wolframalpha.com/input/?i=int+sqrt(1-x∧2)

Po całkowaniu i uporządkowaniu wyrazów mamy:

$$s(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{2mE - m^2\omega^2 x^2} + \frac{E}{\omega}\arcsin\left(\sqrt{\frac{m}{2E}}\,\omega x\right)$$

natomiast całka zupełna równania (20) to:

$$S(t,x) = -E\,t + s(x) = -E\,t + \frac{1}{2}x\sqrt{2mE - m^2\omega^2 x^2} + \frac{E}{\omega}\arcsin\left(\sqrt{\frac{m}{2E}}\,\omega x\right).$$

Zależność położenia od czasu jest wyznaczona w sposób uwikłany pochodną czasową całki zupełnej względem energii E:

$$\frac{\partial S(t,x)}{\partial E} = -t_0.$$

Obliczenie pochodnej cząstkowej po E jest uciążliwe, ale ostatecznie wyrazy *nie zawierające* $\arcsin$ upraszczają się:

$$\frac{\partial s(x)}{\partial E} = \frac{1}{\omega}\arcsin\left(\sqrt{\frac{m}{2E}}\,\omega x\right),$$

otrzymując:

$$\arcsin\left(\sqrt{\frac{m}{2E}}\,\omega x\right) = \omega(t - t_0).$$

Działając obustronnie funkcją sin dostajemy:

$$\sqrt{\frac{m}{2E}}\,\omega x = \sin\left(\omega(t - t_0)\right),$$

czyli:

$$x = \frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{2E}{m}}\sin\left(\omega(t - t_0)\right).$$

Końcowy wynik jest identyczny z (12), bo $\omega = \sqrt{k/m}$).

Pochodna $\partial S(t,x)/\partial x$ z kolei daje pęd:

$$p = \frac{\partial S}{\partial x} = \sqrt{2mE - m^2\omega^2 x^2}.$$

Warto zauważyć, że równanie Hamiltona-Jacobiego przypomina równanie Schrodingera, natomiast stała t_0 określa translację w czasie, zgodnie z sensem zasady zachowania energii; po energii E różniczkujemy całkę zupełną.