Zadanie 1.

1. Obliczyć tempo reakcji λ (liczbę zderzeń na sekundę w jednostce objętości) nienaładowanych kul o promieniach r_1, r_2 i masach m_1, m_2, zakładając, że ich gęstości liczbowe wynoszą n_1 i n_2 a rozkład prawdopodobieństwa prędkości zadany jest rozkładem Maxwella-Boltzmanna w temperaturze T.

   Wskazówka: Jednym ze sposobów uproszczenia wyjściowej całki 6-krotnej po składowych prędkości v_x, v_y, v_z jest zamiana zmiennych na prędkość środka masy oraz prędkość względną, a następnie obliczenie obu całek potrójnych w układzie wsp. sferycznych.

   ODP: $\sigma n_1 n_2 \sqrt{8 k_B T/\pi/\mu}$, $\quad \sigma = \pi(r_1^2 + r_2^2)$, $\quad \mu = (1/m_1 + 1/m_2)^{-1}$.

2. Wyznaczyć prawdopodobieństwo tunelowania cząstki o prędkości v (równoważnej energii kinetycznej E) i ładunku $+Z_b q_e$ usiłującej „przebić się” przez odpychającą barierę potencjału elektrostatycznego $U(r)$ jądra o ładunku $+Z_a q_e$, gdzie q_e to ładunek elementarny, natomiast Z_a, Z_b liczby protonów w jądrze (całkowity ładunek jądra).

   Wskazówka: Barierę potencjału od r_0 (promień jądra, gdzie zakładamy, że bariera się kończy) do r_1 (klasyczny promień powrotu, gdzie cząstka niekwantowa o energii E odbiłaby się z powrotem) należy zamienić na serię cienkich barier prostokątnych o grubości dr (przybliżenie WKB), dla których współczynnik prawdpodobieństwa tunelowania P jest znany i wynosi

   $$P = e^{-\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m(E-U)}dr}.$$

   Zob. Rys. 18.2 w podręczniku Kippenhahna.

   ODP: $P = e^{-2\pi\eta}, \eta = \alpha Z_a Z_b/(v/c) \equiv q_e^2 Z_a Z_b/(2\varepsilon_0 h v)$.

3. Obliczyć tempo reakcji termojądrowych $\lambda =< \sigma v > n_1 n_2$ w plaźmie o zadanej temperaturze i gęstości jeżeli przekrój czynny $\sigma(E) = S_0 \frac{P}{E}$ na reakcję, gdzie E jest całkowitą energią zderzenia w układzie środka masy, jest znany, łącząc wyniki Zad. 1a i 1 b. Oszacować wynik korzystając z własności piku Gamowa, przybliżając całkę np: metodą Laplace'a (zastępując ją całką Gaussowską).

Wskazówka: zob. np: R. Kippenhahn, Stellar Structure and Evolution Rozdz. 18.3 Thermonulcear reaction rates lub D. Arnett, Supernovae and nucleosynthesis, Rozdz. 3.3 Coulomb barrier

ODP: $< \sigma v >= \frac{4}{k_B T\sqrt{2\pi\mu k_B T}} \int_0^\infty e^{-\sqrt{E_g/E} - E/(k_B T)} S(E) dE \simeq \frac{4\sqrt[6]{2E_g} e^{-3\sqrt[3]{\frac{E_g}{2k_B T}}}}{\sqrt{3\mu}(k_B T)^{2/3}} S_0$.

Zadanie 2.

Obliczyć współczynnik S_0 dla przekroju czynnego σ reakcji spalania wodoru w cyklu pp

$$p + p \to d + e^+ + \nu_e.$$

Wskazówka: zob. Weinberg, Teoria pól kwantowych, T.1, Rozdz. 3.4 Szybkości i przekroje czynne, wyprowadzenie wzoru (3.4.31). Element macierzowy można przyjąć $|M|^2 = 2G_F^2 = const$, gdzie G_F to stała Fermiego (sprzężenia oddziaływań słabych). Zgodnie z regułą Bentleya budowania teleskopów, szybciej będzie najpierw obliczyć czas życia neutronu w reakcji $n \to p + e^- + \bar{\nu}_e$.

ODP:

$$S_0 = \frac{f(q_{pp})/f(q_n)}{(2\pi)^3} \times \frac{1}{\tau} \times \frac{\hbar^3}{m_e^2 c^2}, \quad \text{gdzie wsp. przestrzeni fazowej} \quad f(q) = \int\limits_0^{q-1} (q-x)x^2\sqrt{(q-x)^2-1}dx,$$

dla rozpadu neutronu $q_n = (m_n - m_p)/m_e$ a dla reakcji $pp, q_{pp} = (2m_p - m_d)/m_e$, natomiast τ jest czasem życia neutronu.

Zadanie 3.

Wyprowadzić układ równań spalania wodoru (kinetyki jądrowej) w cyklu ppI. Sprawdzić zachowanie liczby barionowej.

Zadanie 4.

Wyznaczyć przebieg znormalizowanego widma energetycznego (liczby cząstek emitowanych w przedziale energii neutrina $\mathcal{E}_{\nu_e}$) dla neutrin pp przyjmując warunki w centrum Słońca.

ODP: funkcyjna postać widma energetycznego neutrin pp jest proporcjonalna do f. podcałkową funkcji $f(Q/(m_e c^2))$ z Zad. 2, jeżeli utożsamimy $x \equiv \mathcal{E}_{\nu_e}/(m_e c^2)$.