

**Zadanie 1.**

1. Obliczyć tempo reakcji  $\lambda$  (liczbę zderzeń na sekundę w jednostce objętości) nienaładowanych kul o promieniach  $r_1, r_2$  i masach  $m_1, m_2$ , zakładając, że ich gęstości liczbowe wynoszą  $n_1$  i  $n_2$  a rozkład prawdopodobieństwa prędkości zadany jest rozkładem Maxwella-Boltzmanna w temperaturze  $T$ .

*Wskazówka:* Jednym ze sposobów uproszczenia wyjściowej całki 6-krotnej po składowych prędkości  $v_x, v_y, v_z$  jest zamiana zmiennych na prędkość środka masy oraz prędkość względną, a następnie obliczenie obu całek potrójnych w układzie wsp. sferycznych.

$$\text{ODP: } \sigma n_1 n_2 \sqrt{8k_B T / \pi / \mu}, \quad \sigma = \pi(r_1^2 + r_2^2), \quad \mu = (1/m_1 + 1/m_2)^{-1}.$$

2. Wyznaczyć prawdopodobieństwo tunelowania cząstki o prędkości  $v$  (równoważnej energii kinetycznej  $E$ ) i ładunku  $+Z_b q_e$  usiłującej „przebić się” przez odpychającą barierę potencjału elektrostatycznego  $U(r)$  jądra o ładunku  $+Z_a q_e$ , gdzie  $q_e$  to ładunek elementarny, natomiast  $Z_a, Z_b$  liczby protonów w jądrze (całkowity ładunek jądra).

*Wskazówka:* Bariere potencjału od  $r_0$  (promień jądra, gdzie zakładamy, że bariera się kończy) do  $r_1$  (klasyczny promień powrotu, gdzie cząstka niekwantowa o energii  $E$  odbiłaby się z powrotem) należy zamienić na serię cienkich barier prostokątnych o grubości  $dr$  (przybliżenie WKB), dla których współczynnik prawdopodobieństwa tunelowania  $P$  jest znany i wynosi

$$P = e^{-\frac{2}{\hbar} \sqrt{2m(E-U)} dr}.$$

Zob. Rys. 18.2 w podręczniku Kippenhahna.

$$\text{ODP: } P = e^{-2\pi\eta}, \quad \eta = \alpha Z_a Z_b / (v/c) \equiv q_e^2 Z_a Z_b / (2\varepsilon_0 \hbar v).$$

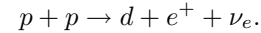
3. Obliczyć tempo reakcji termojądrowych  $\lambda = \langle \sigma v \rangle n_1 n_2$  w plazmie o zadanej temperaturze i gęstości jeżeli przekrój czynny  $\sigma(E) = S_0 \frac{P}{E}$  na reakcję, gdzie  $E$  jest całkowitą energią zderzenia w układzie środka masy, jest znany, łącząc wyniki Zad. 1a i 1 b. Oszacować wynik korzystając z własności piknu Gamowa, przybliżając całkę np: metodą Laplace’a (zastępując ją całką Gaussowską).

*Wskazówka:* zob. np: R. Kippenhahn, **Stellar Structure and Evolution** Rozdz. 18.3 Thermonuclear reaction rates lub D. Arnett, **Supernovae and nucleosynthesis**, Rozdz. 3.3 Coulomb barrier

$$\text{ODP: } \langle \sigma v \rangle = \frac{4}{k_B T \sqrt{2\pi\mu k_B T}} \int_0^\infty e^{-\sqrt{E_g/E} - E/(k_B T)} S(E) dE \simeq \frac{4 \sqrt{2E_g} e^{-3 \sqrt{\frac{E_g}{2k_B T}}}}{\sqrt{3\mu} (k_B T)^{2/3}} S_0.$$

**Zadanie 2.**

Obliczyć współczynnik  $S_0$  dla przekroju czynnego  $\sigma$  reakcji spalania wodoru w cyklu pp



*Wskazówka:* zob. Weinberg, Teoria pól kwantowych, T.1, Rozdz. 3.4 Szybkości i przekroje czynne, wyprowadzenie wzoru (3.4.31). Element macierzowy można przyjąć  $|M|^2 = 2G_F^2 = \text{const}$ , gdzie  $G_F$  to stała Fermiego (sprzężenia oddziaływań słabych). Zgodnie z regułą Bentleya budowania teleskopów, szybciej będzie najpierw obliczyć czas życia neutronu w reakcji  $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$ .

ODP:

$$S_0 = \frac{f(q_{pp})/f(q_n)}{(2\pi)^3} \times \frac{1}{\tau} \times \frac{\hbar^3}{m_e^2 c^2}, \quad \text{gdzie wsp. przestrzeni fazowej} \quad f(q) = \int_0^{q-1} (q-x)x^2 \sqrt{(q-x)^2 - 1} dx,$$

dla rozpadu neutronu  $q_n = (m_n - m_p)/m_e$  a dla reakcji pp,  $q_{pp} = (2m_p - m_d)/m_e$ , natomiast  $\tau$  jest czasem życia neutronu.

**Zadanie 3.**

Wyprowadzić układ równań spalania wodoru (kinetyki jądrowej) w cyklu ppI. Sprawdzić zachowanie liczby barionowej.

**Zadanie 4.**

Wyznaczyć przebieg znormalizowanego widma energetycznego (liczby cząstek emitowanych w przedziale energii neutrina  $\mathcal{E}_{\nu_e}$ ) dla neutrin pp przyjmując warunki w centrum Słońca.

ODP: funkcyjna postać widma energetycznego neutrin pp jest proporcjonalna do f. podcałkową funkcji  $f(Q/(m_e c^2))$  z Zad. 2, jeżeli utożsamimy  $x \equiv \mathcal{E}_{\nu_e}/(m_e c^2)$ .