Zadanie 1.

Korzystając z równania Chandrasekhara struktury białego karła

$$\Delta\varphi + \left(\varphi^2 - \frac{1}{z_c^2}\right)^{3/2} = 0,$$

wyprowadzić bezwymiarowy wzór na promień R wyrażony w jednostkach promienia Schwarzschilda.

Wskazówka: zob. Kippenhahn, Rozdz. 37.1 Chandrasekhar's Theory, str. 475.

$$\text{ODP:} \qquad \frac{R}{R_g} = -\frac{m_\mathrm{u}/m_e}{2 z_c \zeta_1 \zeta_2}.$$

Zadanie 2.

Z jednorodnej kuli o gęstości ρ_0 w równowadze hydrostatycznej „usuwamy" ciśnienie. Ile czasu będzie trwał newtonowski kolaps do punktu? Ile energii zostanie wyzwolonej w trakcie kolapsu? Podać wartość liczbową dla białego karła.

Zadanie 3.

Rozważmy prosty model spontanicznego powstania fali uderzeniowej w supernowej, czyli równanie Burgersa

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + u(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \epsilon \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

z warunkami początkowymi np:

$$u(x,0) = 1/(1+e^x).$$

Rozpatrując przypadek bez lepkości $\epsilon \to 0$ wyznaczyć moment i miejsce powstania fali uderzeniowej. Jak będzie wyglądała dalsza ewolucja modelu? Z jaką prędkością będzie poruszała się fala uderzeniowa (front fali uderzeniowej, nieciągłość, ang. *shock*)?

Zadanie 4.

Obliczyć w układzie cylindrycznym r, z, ϕ

$$\nabla \times \left[(\vec{v}\nabla)\vec{v})\right],$$

jeżeli stacjonarne pole prędkości $\vec{v}$ jest zadane cylindryczną rotacją różnicową (różniczkową)

$$\vec{v}(r,z,\phi) = \Omega(r,z) r\, \vec{e}_\phi.$$

Korzystając z wyniku dokończyć Zad. 6* z Zestawu 1.

$$\text{ODP:} \qquad 2r\Omega \frac{\partial\Omega}{\partial z}.$$

Zadanie 5.

Rozwiązać równanie rotującej gwiazdy $h + \Phi_g + \Phi_c = C$ określając kształt powierzchni $h \equiv 0$ dla:

- wiadra Newtona, gdzie Φ_g - pole jednorodne, Φ_c - rotacja sztywna (ze stałą prędkością kątową),
- modelu Roche'a, Φ_g - masa punktowa, Φ_c - rotacja sztywna,
- dysku Keplerowskiego, Φ_g - masa punktowa, Φ_c - prawo Keplera,
- rotującej jednorodnej elipsoidy (Zad. 7).

Zadanie 6.

W modelu Roche'a rotującej gwiazdy obliczyć maksymalne możliwe spłaszczenie R_p/R_e, gdzie R_p jest „promieniem" biegunowym (na osi obrotu $r=0$), a R_e równikowym (na płaszczyźnie $z=0$). Jako maksymalną rotację uznajemy sytuację, w której prędkość na równiku staje się równa I prędkości kosmicznej.

Obliczyć objętość ekstremalnej gwiazdy Roche'a.

Wskazówka: zob. A&A 517, A7 (2010), rozdz. 4.

ODP: $$\frac{R_p}{R_e} = \frac{2}{3}, \quad V = \frac{4}{3}\pi R_e^3 \kappa, \kappa = \log(27) - 4 + 3\sqrt{3} - 6\coth^{-1}\sqrt{3} \simeq 0.5411156.$$

Zadanie 7.

„Planeta" w postaci jednorodnej kuli o gęstości ρ_0 i masie M zaczyna powoli obracać się z prędkością kątową Ω. Zakładając, że przyjmuje kształt elipsoidy obrotowej, obliczyć spłaszczenie ε (lub mimośród e) przekroju południkowego oraz moment pędu. Model powyższy znany jest jako sferoid Maclaurina, a potencjał grawitacjny elipsoidy można znaleźć np: na https://physics.stackexchange.com/.

ODP: $$\chi = \frac{\Omega^2}{2\pi G\rho} = \varepsilon \frac{(2\varepsilon^2+1)\arccos(\varepsilon) - 3\varepsilon\sqrt{1-\varepsilon^2}}{(1-\varepsilon^2)^{3/2}}.$$