Model Eddingtona, reakcje termojądrowe w gwiazdach

Zadanie 1.

Zakładając, że stosunek ciśnienia promieniowania P_r (gazu fotonowego) do ciśnienia materii P_m (gazu doskonałego) jest stały i równy

$$\beta = \frac{P_\mathrm{r}}{P_\mathrm{m}},$$

sprowadzić równanie stanu ich mieszaniny do postaci politropowej

$$P = K\rho^\gamma,$$

gdzie K zależy m.in. od β i składu izotopowego a indeks politropowy tak skonstruowanej politropy $n = 3$.

Korzystając z wyniku obliczyć β dla masy i metaliczności wylosowanej dla siebie gwiazdy.

Wskazówka: dla $n = 3$ obowiązuje wzór na masę Chandrasekhara.

Zadanie 2.

Porównać graficznie i numerycznie model Eddingtona Słońca z wynikami bardziej realistycznych obliczeń, np: SSM (Standardowy model Słońca Bahcalla) lub MESA.

Zadanie 3.

Obliczyć tempo reakcji λ (liczbę zderzeń na sekundę w jednostce objętości) nienaładowanych kul o promieniach r_1, r_2 i masach m_1, m_2, zakładając, że ich gęstości liczbowe wynoszą n_1 i n_2 a rozkład prawdopodobieństwa prędkości zadany jest rozkładem Maxwella-Boltzmanna w temperaturze T.

Wskazówka: Jednym ze sposobów uproszczenia wyjściowej całki 6-krotnej po składowych prędkości v_x, v_y, v_z jest zamiana zmiennych na prędkość środka masy oraz prędkość względną, a następnie obliczenie obu całek potrójnych w układzie wsp. sferycznych.

ODP: $\sigma n_1 n_2 \sqrt{8k_B T/\pi/\mu}$, $\quad \sigma = \pi(r_1^2 + r_2^2)$, $\quad \mu = (1/m_1 + 1/m_2)^{-1}$.

Zadanie 4.

Wyznaczyć prawdopodobieństwo tunelowania cząstki o prędkości v (równoważnej energii kinetycznej E) i ładunku $+Z_b q_e$ usiłującej „przebić się" przez odpychającą barierę potencjału elektrostatycznego $U(r)$ jądra o ładunku $+Z_a q_e$, gdzie q_e to ładunek elementarny, natomiast Z_a, Z_b liczby protonów w jądrze (całkowity ładunek jądra).

Wskazówka: Barierę potencjału od r_0 (promień jądra, gdzie zakładamy, że bariera się kończy) do r_1 (klasyczny promień powrotu, gdzie cząstka niekwantowa o energii E odbiłaby się z powrotem) należy zamienić na serię cienkich barier prostokątnych o grubości dr (przybliżenie WKB), dla których współczynnik prawdpodobieństwa tunelowania P jest znany i wynosi

$$P = e^{-\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m(E-U)}dr}.$$

Zob. Rys. 18.2 w podręczniku Kippenhahna.

ODP: $P = e^{-2\pi\eta}, \eta = \alpha Z_a Z_b/(v/c) \equiv q_e^2 Z_a Z_b/(2\varepsilon_0 h v)$.

Zadanie 5.

Obliczyć tempo reakcji termojądrowych $\lambda =< \sigma v > n_1 n_2$ w plaźmie o zadanej temperaturze i gęstości jeżeli przekrój czynny $\sigma(E) = S_0 \frac{P}{E}$ na reakcję, gdzie E jest całkowitą energią zderzenia w układzie środka masy, jest znany, łącząc wyniki Zad. 3 i 4. Oszacować wynik korzystając z własności piku Gamowa, przybliżając całkę np: metodą Laplace'a (zastępując ją całką Gaussowską).

Wskazówka: zob. np: R. Kippenhahn, Stellar Structure and Evolution Rozdz. 18.3 Thermonulcear reaction rates lub D. Arnett, Supernovae and nucleosynthesis, Rozdz. 3.3 Coulomb barrier

ODP: $< \sigma v >= \frac{4}{k_B T \sqrt{2\pi \mu k_B T}} \int_0^\infty e^{-\sqrt{E_g/E} - E/(k_B T)} S(E) dE \simeq \frac{4\sqrt[6]{2E_g} e^{-3\sqrt[3]{\frac{E_g}{2k_B T}}}}{\sqrt{3\mu}(k_B T)^{2/3}} S_0.$

Zadanie 6.

Wyprowadzić układ równań spalania wodoru (kinetyki jądrowej) w cyklu ppI. Sprawdzić zachowanie liczby barionowej.

Zadanie 7.

Rozwiązać numerycznie układ równań spalania wodoru (kinetyki jądrowej) w cyklu ppI zakładając stałą temperaturę i gęstość odpowiadającą warunkom w centrum Słońca. Jako warunki początkowe przyjąć czysty wodór lub H/He w składzie po Wielkim Wybuchu (nukleosyntezie kosmologicznej).

Przyjąć następujące przybliżenie zależności temperaturowej tempa reakcji λ:

$$\lambda(T_9) = e^{a_1 + \frac{a_2}{T_9} + \frac{a_3}{\sqrt[3]{T_9}} + a_4 \sqrt[3]{T_9} + a_5 T_9 + a_6 T_9^{5/3} + a_7 \ln(T_9)}$$

gdzie $T_9 = T/(10^9 K)$.

Poniżej zaprezentowano wyciąg ze standardowej tabeli reakcji jądrowych, oryginał można pobrać pod adresem
http://download.nucastro.org/astro/reaclib/old/2000/reaclib.nosmo.gz Tabela zawiera tempa reakcji $\lambda_{pp}, \lambda_{pd}, \lambda_{33}$.

	λ_{pp}	λ_{pd}	λ_{33}
	p	p	he3
	p	d	he3
	d	he3	p
			p
			he4
	bet+	cf88n	cf88n
Q	1.44206e+00	5.49400e+00	1.28600e+01
a_1	-0.347863e+02	0.789331e+01	0.254460e+02
a_2	0.141438e-03	-0.295519e-02	0.685749e-02
a_3	-0.351193e+01	-0.323527e+01	-0.130056e+02
a_4	0.310086e+01	0.142088e+01	-0.985324e+00
a_5	-0.198314e+00	-0.126344e+00	0.119691e+01
a_6	0.126251e-01	0.974799e-02	-0.139031e+00
a_7	-0.102517e+01	-0.178045e+00	-0.115865e+01

Jednostką $< \sigma v >$ powinien być [cm^3 s^{-1} mol].