

Zadanie 1.

Zakładając, że stosunek ciśnienia promieniowania P_r (gazu fotonowego) do ciśnienia materii P_m (gazu doskonałego) jest stały i równy

$$\beta = \frac{P_r}{P_m},$$

sprowadzić równanie stanu ich mieszaniny do postaci politropowej

$$P = K\rho^\gamma,$$

gdzie K zależy m.in. od β . Ile wynosi indeks politropowy n tak skonstruowanej politropy?

UWAGA: równanie stanu gazu fotonowego uznajmy jako znane z innych zajęć, ale można je też wyprowadzić.

Zadanie 2.

Korzystając z wyników poprzedniego zadania przedyskutować tzw. standardowy model Eddingtona parametryzowany przez β . Obliczyć masę gwiazdy w zależności od β . Jakie β odpowiada Słońcu? Jak dobre w sensie ilościowym stanowi przybliżenie bardziej realistycznych obliczeń, np: **SSM** lub **MESA**?

Zadanie 3.

Wyprowadzić ogólne równanie stanu doskonałego gazu elektronowego (fermionowego) w temperaturze T .

Przedyskutować przypadki asymptotyczne:

1. $T \rightarrow 0$, $\rho \rightarrow 0$ (gaz zdegenerowany $\mu \gg kT$, nierelatywistyczny $m_e c^2 \gg kT$)
2. $T \rightarrow 0$, $\rho \rightarrow \infty$ (gaz zdegenerowany, relatywistyczny)
3. $T \rightarrow \infty$ (gorący gaz)

i zapisać je w formie analitycznej, o ile to możliwe politropowej.

WSKAZÓWKA: ogólne równanie stanu można zapisać w formie analitycznej (symbolicznej) pod warunkiem użycia funkcji specjalnych, a konkretnie *relatywistycznych uogólnionych całek Fermiego-Diraca* G_n^\pm lub/i F_k . Przypadki szczególne można uzyskać ze wzorów ogólnych, bądź bezpośrednio, poprzez rozumowanie fizyczne.

Zadanie 4.

Wykorzystać wyniki poprzedniego zadania do wyznaczenia *masy Chandrasekhara* M_{Ch} , czyli maksymalnej masy białego karła, a równocześnie masy modelu politropowego z $n = 3$.

WSKAZÓWKA: Wynik można zapisać na kilka sposobów, z użyciem stałej politropowej K , za pomocą masy Plancka m_{Pl} lub masy Słońca M_\odot

$$M_{Ch} = \kappa \frac{m_{Pl}^3}{m_p^2} \simeq 1.45(2Y_e)^2 M_\odot.$$

Proszę rachunek doprowadzić aż do uzyskania powyższej wartości numerycznej, pamiętając że stała Plancka $\hbar = h/(2\pi)$. Wynik powinien zawierać wyłącznie stałe matematyczne i fizyczne, za wyjątkiem liczby leptonowej (elektronowej) na baryon $Y_e = n_e/n_B$, która dla materii o równej liczbie protonów i neutronów wynosi $Y_e = 0.5$.

Pytanie dodatkowe: czy manipulując masą i spinem fermionu, a także masą ciała, można wygenerować obiekt udający czarną dziurę, np: Sgr A*?