Zadanie 1.

Wyprowadzić twierdzenie wirialne:

$$E_g + 3\int P\,dV = 0,$$

gdzie E_g to grawitacyjna energia wiązania, natomiast całka z ciśnienia P jest po całej objętości „gwiazdy".

Zadanie 2.

Rozważamy model gromady kulistej gwiazd (sfera Plummera) o masie M w postaci politropy z $n = 5$. Zdefiniować „średni" promień gromady a zgodnie ze wzorem

$$\rho_C = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi a^3}.$$

Wyprowadzić wzory na gęstość, potencjał grawitacyjny oraz natężenie pola grawitacyjnego. Obliczyć grawitacyjną energię wiązania gromady U_{GC}. Wyrazić wynik w stosunku do energii wiązania U_B „typowych" ciasnych układów podwójnych czerwonego olbrzyma, Słońca, białego karła, gwiazdy neutronowej i czarnej dziury. Przyjąć masę składników równą 1 $M_\odot$. Czy jest możliwa sytuacja w której $U_{GC} \ll U_B$?

Zadanie 3a.

„Wyprowadzić" wzór na termiczną długość fali de'Broglie'a λ. Porównać ze średnią odległością pomiędzy cząsteczkami gazu wybranych ciał.

Zadanie 3b.

Wyprowadzić wzór na potencjał chemiczny μ klasycznego gazu doskonałego. Uprościć korzystając z wyniku Zad. 1.

Zadanie 3c.

Obliczyć stopień „jonizacji" w zależności od gęstości i temperatury dla wybranych procesów:

a) jonizacja atomów wodoru:
$$H \rightleftarrows p^+ + e^-$$

b) dysocjacja molekuł wodoru:
$$H_2 \rightleftarrows 2H$$

c) dysocjacja cząstek α
$$\alpha \rightleftarrows 2p + 2n$$

d) anihlacja e^+e^-
$$2\gamma \rightleftarrows e^+ + e^-$$

e) BBN p, n, d, α i ^{3}He

Założyć, że wzór na μ z Zad. 3b jest poprawny. Określić typowe zakresy temperatury, w których powyższe procesy dają nietrywialne, czyli o porównywalnych gęstościach liczbowych cząstek po lewej i prawej stronie reakcji, rozwiązania.

Odp. Zad. 3c/ce. *Zawartość X_k-ego nuklidu o liczbie atomowej Z_k oraz liczbie masowej A_k (l. neutronów $N_k = A_k - Z_k$) jest równa*

$$X_k = \frac{1}{2}\, g_k \left(\frac{1}{2}\rho N_A \lambda^3\right)^{A_k - 1} {A_k}^{5/2}\, X_n^{N_k} X_p^{Z_k}\, e^{\frac{Q_k}{kT}},$$

gdzie zawartości protonów X_p oraz neutronów X_n są rozwiązaniem układu 2 równań wielomianowych

$$\sum_{k=0}^{N_{iso}} X_k = 1, \quad \textit{z.z.l. barionowej}$$

$$\sum_{k=0}^{N_{iso}} \frac{Z_k}{A_k} X_k = Y_e, \quad \textit{z.z. ładunku elektrycznego}$$

a λ jest dł. fali de'Broglie dla wodoru. Zawartości („stężenia") $X_i = A_i n_i / n_B$, gdzie $n_B = \rho N_A$ jest gęstością liczby barionowej (l. barionów na jedn. obj.) , a $Q_k = (Z_i m_p + N_i m_n - m_i)c^2$ to e. wiązania.

Zadanie 4.

Wyprowadzić równanie na rozkład temperatury $T(r)$ wzdłuż promienia gwiazdy przy założeniu, że transport energii można opisać jako dyfuzję gazu fotonowego. Wyrazić współczynnik dyfuzji poprzez średnią długość swobodną lub przekrój czynny i gęstość.

Zadanie 5.

Wyznaczyć średni współczynnik nieprzezroczystości materii (tzw. średnią Rosselanda, ang. *mean Rosseland opacity*).

Zadanie 6.

Wyprowadzić równanie na rozkład temperatury $T(r)$ wzdłuż promienia gwiazdy przy założeniu, że transport energii odbywa się za pomocą konwekcji. Przyjąć, że gradient temperatury jest identyczny z wynikającym z kryterium niestabilności konwekcyjnej.

Zadanie 7.

Podać równanie określające zależność jasności gwiazdy $L(r)$ w zależności od promienia, przy założeniu, że tempo produkcji energii na jednostkę objętości $\varepsilon(T, \rho, X_i)$ w zależności od temperatury T, gęstości ρ i składu chemicznego X_i jest znane. Przepisać równanie w alternatywnej postaci zawierającej $L(m)$ i tempo produkcji energii na jednostkę masy $\epsilon = \varepsilon/\rho$.