

Zadanie 1.

Wyprowadzić twierdzenie wirialne:

$$E_g + 3 \int P dV = 0,$$

gdzie E_g to grawitacyjna energia wiązania, natomiast całka z ciśnienia P jest po całej objętości „gwiazdy”.

Zadanie 2.

Rozważamy model gromady kulistej gwiazd o masie M w postaci politropy z $n = 5$. Zdefiniować „średni” promień gromady a zgodnie ze wzorem

$$\rho_C = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi a^3}.$$

Wyprowadzić wzory na gęstość, potencjał grawitacyjny oraz natężenie pola grawitacyjnego. Obliczyć grawitacyjną energię wiązania.

Zadanie 3.

Korzystając z równania stanu gazu elektronowego w „zerowej” temperaturze $kT/\mu \ll 1$ wyprowadzonego w Zad. 5 z Zestawu 2:

$$P(\rho) = \frac{\pi m_e^4 c^5}{3h^3} f(y),$$

gdzie

$$f(y) = y(2y^2 - 3)\sqrt{1 + y^2} + 3 \operatorname{arsinh} y, \quad y = \frac{p_F}{m_e c},$$

a pęd Fermiego p_F to

$$p_F = \frac{h}{2\pi} \sqrt[3]{\frac{3\pi^2 \rho Y_e}{m_p}} = \left(\frac{3h^3 \rho Y_e}{8\pi m_p} \right)^{1/3}$$

wyprowadzić równania równowagi hydrostatycznej. Równania rozwiązać, i wyliczyć zależność $M(R)$ dla białych karłów w postaci parametrycznej $R(\rho_c), M(\rho_c)$ „sterowanej” gęstością w centrum ρ_c . Obliczenia najprościej wykonać numerycznie, a w przypadkach granicznych analitycznie, korzystając z funkcji Lane-Emdena.

Zadanie 4.

Jak w Zadaniu 3, ale z niezerową, stałą temperaturą $kT \sim \mu$.

Zadanie 5.

Jak w Zadaniu 3, ale z równaniem stanu zadany w postaci tablicy liczb. Do pobrania pod adresem: [EOS 1](#), [EOS 2](#). Na podstawie G. S. Bisnovatyi-Kogan, Stellar Physics, vol. 1.

$\rho, \text{g cm}^{-3}$	$P, \text{dyn cm}^{-2}$	n_e, cm^{-3}	$\rho, \text{g cm}^{-3}$	$P, \text{dyn cm}^{-2}$	n_e, cm^{-3}
7.86	1.01(9)	4.73(24)	4.460(11)	7.890(29)	2.670(35)
7.90	1.01(10)	4.76(24)	5.228(11)	8.352(29)	3.126(35)
8.15	1.01(11)	4.91(24)	6.610(11)	9.986(29)	3.951(35)
11.6	1.21(12)	6.99(24)	7.964(11)	9.831(29)	4.759(35)
16.4	1.40(13)	9.90(24)	9.728(11)	1.083(30)	5.812(35)
45.1	1.70(14)	2.72(25)	1.196(12)	1.218(30)	7.142(35)
212	5.82(15)	1.27(26)	1.471(12)	1.399(30)	8.786(35)
1130	1.90(17)	6.93(26)	1.805(12)	1.638(30)	1.077(36)
1.044(4)	9.744(18)	6.295(27)	2.202(12)	1.950(30)	1.314(36)
2.622(4)	4.968(19)	1.581(28)	2.930(12)	2.592(30)	1.748(36)
6.587(4)	2.431(20)	3.972(28)	3.833(12)	3.506(30)	2.287(36)
1.654(5)	1.151(21)	9.976(28)	4.933(12)	4.771(30)	2.942(36)
4.156(5)	5.266(21)	2.506(29)	6.248(12)	6.481(30)	3.726(36)
1.044(6)	2.318(22)	6.294(29)	7.801(12)	8.748(30)	4.650(36)
2.622(6)	9.759(22)	1.581(30)	9.611(12)	1.170(31)	5.728(36)
6.588(6)	3.911(23)	3.972(30)	1.246(13)	1.695(31)	7.424(36)
8.293(6)	5.259(23)	5.000(30)	1.496(13)	2.299(31)	8.907(36)
1.653(7)	1.435(24)	9.976(30)	1.778(13)	2.848(31)	1.059(37)
3.302(7)	3.833(24)	1.990(31)	2.210(13)	3.931(31)	1.315(37)
6.589(7)	1.006(25)	3.972(31)	2.988(13)	6.178(31)	1.777(37)
1.315(8)	2.604(25)	7.924(31)	3.767(13)	8.774(31)	2.239(37)
2.624(8)	6.676(25)	1.581(32)	5.081(13)	1.386(32)	3.017(37)
3.304(8)	8.738(25)	1.990(32)	6.193(13)	1.882(32)	3.676(37)
5.237(8)	1.629(26)	3.155(32)	7.732(13)	2.662(32)	4.585(37)
8.301(8)	3.029(26)	5.000(32)	9.826(13)	3.897(32)	5.821(37)
1.045(9)	4.129(26)	6.294(32)	1.262(14)	5.861(32)	7.468(37)
1.316(9)	5.036(26)	7.924(32)	1.586(14)	8.595(32)	9.371(37)
1.657(9)	6.860(26)	9.976(32)	2.004(14)	1.286(33)	1.182(38)
2.626(9)	1.272(27)	1.581(33)	2.520(14)	1.900(33)	1.484(38)
4.164(9)	2.356(27)	2.506(33)	2.761(14)	2.242(33)	1.624(38)
6.601(9)	4.362(27)	3.972(33)	3.085(14)	2.751(33)	1.814(38)
8.312(9)	5.662(27)	5.000(33)	3.433(14)	3.369(33)	2.017(38)
1.046(10)	7.702(27)	6.294(33)	3.885(14)	4.286(33)	2.280(38)
1.318(10)	1.048(28)	7.924(33)	4.636(14)	6.403(33)	2.715(38)
1.659(10)	1.425(28)	9.976(33)	5.094(14)	7.391(33)	2.979(38)
2.090(10)	1.938(28)	1.256(34)			
2.631(10)	2.503(28)	1.581(34)			
3.332(10)	3.404(28)	1.990(34)			
4.172(10)	4.628(28)	2.506(34)			
5.254(10)	5.949(28)	3.155(34)			
6.617(10)	8.089(28)	3.972(34)			
8.332(10)	1.100(29)	5.000(34)			
1.049(11)	1.495(29)	6.294(34)			
1.322(11)	2.033(29)	7.924(34)			
1.664(11)	2.597(29)	9.976(34)			
1.844(11)	2.892(29)	1.105(35)			
2.096(11)	3.290(29)	1.256(35)			
2.446(11)	4.472(29)	1.581(35)			
3.325(11)	5.816(29)	1.990(35)			
4.188(11)	7.538(29)	2.506(35)			
4.299(11)	7.905(29)	2.573(35)			