

Gaz fermionowy, teoria Chandrasekhara, EOS w postaci analitycznej, całkowitej i numerycznej, struktura białych karłów.

Zadanie 1.

Wyprowadzić równanie stanu $P(\rho, T)$ gazu fermionowego, w szczególności elektronowego, neutronowego lub neutrinowego. Podać wzory na ciśnienie $P(\mu, T)$, gęstość cząstek $n(\mu, T)$, gęstość $\rho(\mu, T)$ i entalpię właściwą $h(\mu, T)$, gdzie μ to potencjał chemiczny, natomiast T – temperatura gazu. Podać jawne wzory na $P(\rho)$ w przypadku „niskiej” temperatury $T \rightarrow 0$, gdy możemy założyć, że $\mu \gg k_B T$.

Zadanie 2.

Znając wzór $P(\rho) = \dots$ na równanie stanu gazu elektronowego w „zerowej” temperaturze, wyprowadzić w analogii do teorii Lane-Emdena, równanie Chandrasekhara na strukturę białego karła. Podać wzory na rozkład ciśnienia $P(r)$ oraz gęstości $\rho(r)$ wzdłuż promienia, a także entalpię właściwą $h(r)$, masę $m(r)$ zawartą w kuli o promieniu r , natężenie pola grawitacyjnego $g(r)$ wewnątrz obiektu oraz potencjał grawitacyjny $\Phi_g(r)$.

Zadanie 3.

Pokazać szczegółowo, że równanie Chandrasekhara przechodzi w równanie Lane-Emdena zarówno w przypadku małych, jak i dużych gęstości. Wyniki sprawdzić graficznie.

Zadanie 4. Obliczyć, i przeanalizować proces dochodzenia do masy Chandrasekhara dla hipotetycznego obiektu zbudowanego z

1. ${}^4\text{He}$,
2. neutronów,
3. masywnych neutrin.

Obliczyć promień ciała w jednostkach jego promienia Schwarzschilda. Kiedy przybliżenie newtonowskie załamuje się?

Zadanie 5.

Obliczyć w ramach teorii Chandrasekhara grawitacyjną energię wiązania białych karłów, zbudowanych z materii „symetrycznej” o $Y_e \equiv n_e/n_B = 0.5$, w szczególności ${}^4\text{He}$, ${}^{12}\text{C}$, ${}^{16}\text{O}$ i dowolnie wybranych innych przykładów. Porównać energię wiązania z maksymalną energią możliwą do uzyskania w eksplozji termojądrowej, zakładając 100% efektywność spalania, t.j., całkowitą konwersję wszystkich jąder atomowych do stanu podstawowego (np. ${}^{56}\text{Ni}$).

Zadanie 6.

Obliczyć i narysować zależność masa-promień dla białego karła o *niezerowej* stałej temperaturze T . Porównać wynik z przypadkiem $\mu \gg k_B T$.

Zadanie 7.

Obliczyć zależność masa-promień ciała z równaniem stanu zadany w postaci tablicy liczb. Do pobrania pod adresem: [EOS 1](#), [EOS 2](#). Na podstawie G. S. Bisnovatyi-Kogan, Stellar Physics, vol. 1.

ρ , g·cm ⁻³	P , dyn·cm ⁻²	n_b , cm ⁻³	ρ , g·cm ⁻³	P , dyn·cm ⁻²	n_b , cm ⁻³
7.86	1.01(9)	4.73(24)	4.460(11)	7.890(29)	2.670(35)
7.90	1.01(10)	4.76(24)	5.228(11)	8.352(29)	3.126(35)
8.15	1.01(11)	4.91(24)	6.610(11)	9.098(29)	3.951(35)
11.6	1.21(12)	6.99(24)	7.964(11)	9.831(29)	4.759(35)
16.4	1.40(13)	9.90(24)	9.728(11)	1.083(30)	5.812(35)
45.1	1.70(14)	2.72(25)	1.196(12)	1.218(30)	7.143(35)
212	5.82(15)	1.27(26)	1.471(12)	1.399(30)	8.786(35)
1150	1.90(17)	6.93(26)	1.805(12)	1.638(30)	1.077(36)
1.044(4)	9.744(18)	6.295(27)	2.202(12)	1.950(30)	1.314(36)
2.622(4)	4.968(19)	1.581(28)	2.930(12)	2.592(30)	1.748(36)
6.587(4)	2.431(20)	3.972(28)	3.833(12)	3.506(30)	2.287(36)
1.654(5)	1.151(21)	9.976(28)	4.933(12)	4.771(30)	2.942(36)
4.156(5)	5.266(21)	2.506(29)	6.248(12)	6.481(30)	3.726(36)
1.044(6)	2.318(22)	6.294(29)	7.801(12)	8.748(30)	4.650(36)
2.622(6)	9.755(22)	1.581(30)	9.611(12)	1.170(31)	5.728(36)
6.588(6)	3.911(23)	3.972(30)	1.246(13)	1.695(31)	7.424(36)
8.293(6)	5.259(23)	5.000(30)	1.496(13)	2.209(31)	8.907(36)
1.655(7)	1.435(24)	9.976(30)	1.778(13)	2.848(31)	1.059(37)
3.302(7)	3.833(24)	1.990(31)	2.210(13)	3.931(31)	1.315(37)
6.589(7)	1.006(25)	3.972(31)	2.988(13)	6.178(31)	1.777(37)
1.315(8)	2.604(25)	7.924(31)	3.767(13)	8.774(31)	2.239(37)
2.624(8)	6.676(25)	1.581(32)	5.081(13)	1.386(32)	3.017(37)
3.304(8)	8.738(25)	1.990(32)	6.193(13)	1.882(32)	3.675(37)
5.237(8)	1.629(26)	3.155(32)	7.732(13)	2.662(32)	4.585(37)
8.301(8)	3.029(26)	5.000(32)	9.826(13)	3.897(32)	5.821(37)
1.045(9)	4.129(26)	6.294(32)	1.262(14)	5.861(32)	7.468(37)
1.316(9)	5.036(26)	7.924(32)	1.586(14)	8.595(32)	9.371(37)
1.657(9)	6.860(26)	9.976(32)	2.004(14)	1.286(33)	1.182(38)
2.626(9)	1.272(27)	1.581(33)	2.520(14)	1.900(33)	1.484(38)
4.164(9)	2.356(27)	2.506(33)	2.761(14)	2.242(33)	1.625(38)
6.601(9)	4.362(27)	3.972(33)	3.085(14)	2.751(33)	1.814(38)
8.312(9)	5.662(27)	5.000(33)	3.433(14)	3.369(33)	2.017(38)
1.046(10)	7.702(27)	6.294(33)	3.885(14)	4.286(33)	2.280(38)
1.318(10)	1.048(28)	7.924(33)	4.636(14)	6.403(33)	2.715(38)
1.659(10)	1.425(28)	9.976(33)	5.094(14)	7.391(33)	2.979(38)
2.090(10)	1.938(28)	1.256(34)			
2.631(10)	2.503(28)	1.581(34)			
3.313(10)	3.404(28)	1.990(34)			
4.172(10)	4.628(28)	2.506(34)			
5.254(10)	5.949(28)	3.155(34)			
6.617(10)	8.089(28)	3.972(34)			
8.332(10)	1.100(29)	5.000(34)			
1.049(11)	1.495(29)	6.294(34)			
1.322(11)	2.033(29)	7.924(34)			
1.664(11)	2.597(29)	9.976(34)			
1.844(11)	2.892(29)	1.105(35)			
2.096(11)	3.290(29)	1.256(35)			
2.640(11)	4.473(29)	1.581(35)			
3.325(11)	5.816(29)	1.990(35)			
4.188(11)	7.538(29)	2.506(35)			
4.299(11)	7.805(29)	2.572(35)			