

**Zadanie 1.**

Zakładając, że stosunek ciśnienia promieniowania  $P_r$  (gazu fotonowego) do ciśnienia materii  $P_m$  (gazu doskonałego) jest stały i równy

$$\beta = \frac{P_r}{P_m},$$

sprowadzić równanie stanu ich mieszaniny do postaci politropowej

$$P = K\rho^\gamma,$$

gdzie  $K$  zależy m.in. od  $\beta$ . Ile wynosi indeks politropowy  $n$  tak skonstruowanej politropy?

UWAGA: równanie stanu gazu fotonowego uznajmy jako znane z innych zajęć, ale można je też wyprowadzić.

**Zadanie 2.**

Korzystając z wyników poprzedniego zadania przedyskutować tzw. standardowy model Eddingtona parametryzowany przez  $\beta$ . Obliczyć masę gwiazdy w zależności od  $\beta$ . Jakie  $\beta$  odpowiada Słońcu? Jak dobre w sensie ilościowym stanowi przybliżenie bardziej realistycznych obliczeń, np: **SSM** lub **MESA**?

**Zadanie 3.**

Wyprowadzić ogólne równanie stanu doskonałego gazu elektronowego (fermionowego) w temperaturze  $T$ .

Przedyskutować przypadki asymptotyczne:

1.  $T \rightarrow 0$ ,  $\rho \rightarrow 0$  (gaz zdegenerowany  $\mu \gg kT$ , nierelatywistyczny  $m_e c^2 \gg kT$ )
2.  $T \rightarrow 0$ ,  $\rho \rightarrow \infty$  (gaz zdegenerowany, relatywistyczny)
3.  $T \rightarrow \infty$  (gorący gaz)

i zapisać je w formie analitycznej, o ile to możliwe politropowej.

WSKAZÓWKA: ogólne równanie stanu można zapisać w formie analitycznej (symbolicznej) pod warunkiem użycia funkcji specjalnych, a konkretnie *relatywistycznych uogólnionych całek Fermiego-Diraca*  $G_n^\pm$  lub/i  $F_k$ . Przypadki szczególne można uzyskać ze wzorów ogólnych, bądź bezpośrednio, poprzez rozumowanie fizyczne.

**Zadanie 4.**

Wykorzystać wyniki poprzedniego zadania do wyznaczenia masy Chandrasekhara  $M_{Ch}$ , czyli maksymalnej masy białego karła, a równocześnie masy modelu politropowego z  $n = 3$ .

WSKAZÓWKA: Wynik można zapisać na kilka sposobów, z użyciem stałej politropowej  $K$ , za pomocą masy Plancka  $m_{Pl}$  lub masy Słońca  $M_\odot$

$$M_{Ch} = \kappa \frac{m_{Pl}^3}{m_p^2} \simeq 1.45(2Y_e)^2 M_\odot.$$

Proszę rachunek doprowadzić aż do uzyskania powyższej wartości numerycznej, pamiętając że stała Plancka  $\hbar = h/(2\pi)$ . Wynik powinien zawierać wyłącznie stałe matematyczne i fizyczne, za wyjątkiem liczby leptonowej (elektronowej) na baryon  $Y_e = n_e/n_B$ , która dla materii o równej liczbie protonów i neutronów wynosi  $Y_e = 0.5$ .

Pytanie dodatkowe: czy manipulując masą i spinem fermionu, a także masą ciała, można wygenerować obiekt udający czarną dziurę, np: Sgr A\*?