

Zadanie 1.

Zadane jest politropowe równanie stanu (EOS)

$$P = K\rho^\gamma,$$

gdzie P - ciśnienie, ρ - gęstość materii, natomiast stałe K oraz wykładnik politropy $\gamma \equiv 1 + 1/n$ są zadane. Wyznaczyć strukturę rodziny obiektów astrofizycznych, wyznaczonych poprzez gęstość (ciśnienie) w centrum $P_c = K\rho_c^\gamma$. Interesuje nas rozkład ciśnienia $P(r)$ oraz gęstości $\rho(r)$ wzdłuż promienia, a także entalpia właściwa $h(r)$, masa $m(r)$ zawarta w kuli o promieniu r , natężenie pola grawitacyjnego $g(r)$ wewnątrz obiektu oraz potencjał grawitacyjny $\Phi_g(r)$. W szczególności interesuje nas promień obiektu R (wyrażony w promieniach Schwarzschilda), jego całkowita masa $M \equiv m(R)$, zależność $M(R)$ lub/i $R(M)$ oraz potencjał grawitacyjny w centrum $\Phi_g(0)/\Phi_g(R)$. Powierzchnia zdefiniowana jest jako miejsce, gdzie $\rho(r) = P(r) = h(r) = 0$. Entalpię właściwą definiuje całka

$$h = \int \frac{dP}{\rho}.$$

Zaprezentować szczegółowo przykład z użyciem n wylosowanego zgodnie z regułą dnia tygodnia urodzin.

Pon $\rightarrow n = 0$

Wto $\rightarrow n = 1$

Śro $\rightarrow n = 2$

Czw $\rightarrow n = 3$

Pią $\rightarrow n = 4$

Sob $\rightarrow n = 5$

Nd $\rightarrow n = 6$

Zadanie można rozwiązać analitycznie/symbolicznie, poprzez funkcje Lane-Emdena, lub numerycznie.

Danymi wejściowymi są: K , γ oraz P_c lub ρ_c .

Zadanie 2.

Analogicznie jak w Zadaniu 1, ale tym razem stała K nie jest znana, natomiast zmierzono promień R i masę M obiektu. Zakładamy, że indeks politropowy równania stanu jest znany i wynosi n . Oprócz $P(r), h(r), \rho(r), g(r), \Phi_g(r)$, w szczególności $P_c \equiv P(0), \rho_c \equiv \rho(0), \Phi_g(0)/\Phi_g(R)$, wyznaczyć kontrast gęstości a także położenie i wartość maksimum g oraz moment bezwładności ciała.

Zaprezentować szczegółowo przykład wylosowany z regułą znaków Zodiaku.

- Pisces - Jowisz
- Aquarius - Procjon A
- Capricorn - 33 Polyhymnia
- Sagittarius - Wolf 489
- Scorpio - Betelgeuse
- Libra - UGC 12591
- Virgo - Gromada w Pannie
- Leo - WISE 0855-0714
- Cancer - TRAPPIST-1d
- Gemini - M13
- Taurus - Syriusz B
- Aries - Pulsar Kraba

Zadanie można rozwiązać analitycznie/symbolicznie, poprzez funkcje Lane-Emdena, lub numerycznie. Danymi wejściowymi są: M, R oraz n .

Zadanie 3.

Wyznaczyć równanie stanu (EOS) postaci $P = P(\rho)$ dla materiału idealnie sprężystego, np: żelaza, o zadanym współczynniku sprężystości objętościowej i gęstości „nieskompresowanej” ρ_0 . Wypisać układ równań równowagi hydrostatycznej dla tego równania stanu i przedyskutować rozwiązania (masę, promień, średnią gęstość) w zależności od stopnia kompresji gęstości centralnej $\eta = \rho_c/\rho_0$, gdzie ρ_0 jest gęstością „naturalną” (bez kompresji).

Obliczyć i narysować zależność $R(M)$ w modelu elastycznym. Porównać wynik z modelem o stałej gęstości ($n = 0, \rho = const$), politropowym (dopasować n) oraz **realistycznym modelem** opublikowanym w **literaturze naukowej**. Przedyskutować ewentualne rozbieżności.

Zadanie najprościej rozwiązać numerycznie. Alternatywnie, można podejść do problemu analitycznie/symbolicznie, np. poprzez zdefiniowanie nowych funkcji w analogii do f. Lane-Emdena.