

Zadanie 1.

Wyznaczyć rozkład ciśnienia $P(r)$, natężenia pola grawitacyjnego $g(r)$ oraz potencjału grawitacyjnego $\Phi_g(r)$ w samograwitującej kuli o gęstości ρ_0 , promieniu R i masie M . Wynik zaprezentować graficznie.

Zadanie 2.

Wyznaczyć rozkład ciśnienia $P(r)$, gęstości $\rho(r)$, potencjału grawitacyjnego $\Phi_g(r)$ i natężenia pola grawitacyjnego $g(r)$ wewnątrz samograwitującej kuli zbudowanej z płynu z kwadratowym równaniem stanu $P(\rho) = K\rho^2$.

Zadanie 3.

Jak w poprzedzających zadaniach, ale dla samograwitującej kuli zbudowanej z gazu doskonałego o stałej temperaturze z liniowym równaniem stanu $P(\rho) = c_s^2\rho$.

Zadanie 4.

Wyprowadzić równanie równowagi hydrostatycznej przy założeniu sferycznej symetrii oraz barotropowego równania stanu $P = P(\rho)$ w postaci

$$h(r) + \Phi_g(r) = C,$$

gdzie

$$h = \int \frac{dp}{\rho}.$$

Zadanie 5.

Korzystając z Zad. 4, wyprowadzić przy założeniu $P = K\rho^{1+1/n}$ równanie Lane-Emdena. Zdefiniować f. L-E w_n . Rozwiązać dla $n = 0, 1, 5$. Ponownie rozwiązać zadania 1-3 korzystając z rozwiązań r. Lane-Emdena. Przedyskutować przy padki graniczne.

Zadanie 6*.

Uogólnić wynik z Zad. 4 na przypadek osiowosymetryczny z rotacją.

Zadanie 7.

Wyprowadzić wzór na masę M oraz promień R ciała z politropowym równaniem stanu, wyrażone przez zero oraz pochodną w zerze funkcji Lane-Emdena $w_n(x)$. Wyznaczyć kontrast gęstości $\rho_c/\bar{\rho}$ wybranych ciał niebieskich o znanej masie i promieniu, np: Ziemi/gwiazdy neutronowej ($n = 1/2$), Słońca ($n = 3$), ...

Zadanie 8.

Określić zależność $R(M)$ lub/i $M(R)$ dla obiektu zbudowanego z materii o politropowym równaniu stanu w zależności od n . Kiedy ciało masywniejsze jest mniejsze?

Zadanie 9.

Obliczyć współczynnik κ momentu bezwładności

$$I = \kappa MR^2$$

oraz potencjał grawitacyjny w centrum $\Phi_g(0)$ ciał opisanych funkcjami Lane-Emdena. Zastosować wynik do Słońca i Ziemi i porównać z bardziej szczegółowymi rezultatami.

Zadanie 10*.

Wyznaczyć równanie stanu (EOS) postaci $P = P(\rho)$ dla materiału idealnie sprężystego, np: metalu, o zadanym współczynniku sprężystości objętościowej. Wypisać układ równań równowagi hydrostatycznej dla tego równania stanu i przedyskutować rozwiązania (masę, promień, średnią gęstość) w zależności od gęstości centralnej $\rho_c \geq \rho_0$, gdzie ρ_0 jest gęstością „naturalną” (bez kompresji).