Zadanie 1.

Dla politropowego równania stanu

$$P(\rho) = K\rho^{\gamma} = K\rho^{1+\frac{1}{n}}$$

wyznaczyć tzw. „prędkość dźwięku” $c_s(\rho)$ oraz entalpię właściwą $h(\rho)$

$$c_s^2 = \frac{\partial P}{\partial \rho} \qquad h(\rho) \equiv \frac{H/V}{\rho} = \int \frac{dp}{\rho}.$$

Wzory wyrazić za pomocą (1) wykładnika politropy γ (2) indeksu politropowego n (3) w postaci mieszanej, tak aby wzory były możliwie „proste”.

Zadanie 2.

Wyprowadzić tzw. wzór barometryczny opisujący słup płynu o równaniu stanu gazu doskonałego w stałej temperaturze w jednorodnym polu grawitacyjnym. Zastosować dla powietrza na Ziemi.

Zadanie 3.

Wyznaczyć rozkład ciśnienia $P(r)$, natężenia pola grawitacyjnego $g(r)$ oraz potencjału grawitacyjnego $\Phi_g(r)$ w samograwitujacej kuli o gęstości ρ_0, promieiu R i masie M.

Zadanie 4.

Wyprowadzić newtonowskie równania (układ równań) równowagi hydrostatycznej opisujące samograwitujące, sferycznie symetryczne ciało zbudowane z materii o równaniu stanu $P = P(\rho)$, gdzie P jest ciśnieniem, natomiast ρ gęstością materii. Określić warunki początkowe (w centrum) i brzegowe (na powierzchni).

Zadanie 5.

Wyznaczyć rozkład ciśnienia, gęstości i natężenia pola grawitacyjnego w samograwitujacej kuli zbudowanej z gazu doskonałego o stałej temperaturze z liniowym równaniem stanu $P(\rho) = c_s^2\rho$.

Zadanie 6.

Wyznaczyć rozkład ciśnienia, gęstości i natężenia pola grawitacyjnego wewnątrz samograwitujacej kuli zbudowanej z płynu z kwadratowym równaniem stanu $P(\rho) = K\rho^2$.

Zadanie 7.

Wyznaczyć równanie stanu (EOS) postaci $P = P(\rho)$ dla materiału idealnie sprężystego, np: metalu, o zadanym współczynniku sprężystości objętościowej. Wypisać układ równań równowagi hydrostatycznej dla tego równania stanu i przedyskutować rozwiązania (masę, promień, średnią gęstość) w zależności od gęstości centralnej $\rho_c \geqslant \rho_0$, gdzie ρ_0 jest gęstością „naturalną” (bez kompresji).

Zadanie 8.

Wyprowadzić równanie różniczkowe 2 rzędu spełnione przez entalpię właściwą $h(r)$ samograwitującego sferycznie symetrycznego obiektu.

Zadanie 9.

Korzystając z Zad. 8, wyprowadzić równanie Lane-Emdena. Zdefiniować f. L-E w_n. Rozwiązać dla $n = 0, 1, 5$.

Zadanie 10.

Wyprowadzić wzór na masę M oraz promień R ciała z politropowym równaniem stanu, wyrażone przez zero oraz pochodną w zerze funkcji Lane-Emdena $w_n(x)$. Wyznaczyć kontrast gęstości $\rho_c/\bar{\rho}$ wybranych ciał niebieskich o znanej masie i promieniu, np: Ziemi ($n = 1/2$), Słońca ($n = 3$), ...

Zadanie 11.

Określić zależność $R(M)$ lub/i $M(R)$ dla obiektu zbudowanego z materii o politropowym równaniu stanu w zależności od n. Kiedy ciało masywniejsze jest mniejsze?