Zadanie 1.

Rozwiązać numerycznie za pomocą metody linii równanie adwekcji

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + v\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = 0,$$

w przedziale $0 \leqslant x \leqslant 1$ z periodycznymi warunkami brzegowymi $u(0,t) = u(1,t)$ oraz warunkami początkowymi w postaci impulsu

$$u(x,0) = \begin{cases} u = 0 \quad \text{dla} \quad x \leqslant \frac{1}{4} \\ u = e^{-\frac{1}{1-(4x-2)^2}} \quad \text{dla} \quad \frac{1}{4} < x < \frac{3}{4} \\ u = 0 \quad \text{dla} \quad x \geqslant \frac{3}{4}. \end{cases}$$

W tym celu należy:

1. podzielić przedział $[0,1]$ na n części i zdefiniować $n+1$ funkcji zależnych tyko od czasu $u_i(t)$ na granicach przedziałów

2. obliczyć numerycznie pochodne np:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}$$

3. rozwiązać układ równań różniczkowych zwyczajnych, np: metodą Rungego-Kutty

Otrzymany wynik porównać z analitycznym, czyli impulsem przesuwającym się w lewo z prędkością v. Impuls powinien wychodzić z lewej strony i powracać z prawej, zgodnie z sensem periodycznych warunków brzegowych, zapętlających przedział $0 < x < 1$.

Zadanie 2.

Rozwiązać analitycznie i numerycznie równanie Burgersa

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + u(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \epsilon\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

w przypadkach $\epsilon = 0$, $\epsilon \to 0$ oraz $\epsilon > 0$. Można użyć war. brzegowych i początkowych z Zad. 1.

Wskazówka Równanie można sprowadzić do liniowego równania przewodnictwa ciepła za pomocą transformacji Cole-Hopfa

$$u = -2\epsilon\,\frac{\partial \ln\chi(x,t)}{\partial x}.$$

Następnie można użyć metody f. Greena lub transformaty Fouriera aby uzyskać rozwiązanie analityczne. Równanie można rozwiązać dla $\epsilon = 0$ metodą charakterystyk, co potrafi np: Mathematica. Wynik jest w postaci uwikłanej.

Rozwiązanie metodą linii w momencie pojawienia się fali uderzeniowej załamuje się na skutek zjawiska Rungego. Rozwiązaniem jest przepisanie równania w postaci zachowawczej, rozwiązanie zagadnienia Riemnanna a następnie użycie metody Godunowa (algorytm **R**econstruct–**E**volve–**A**verage). Innym podejściem jest użycie „sztucznej lepkości” dobierając odpowiednio parametr ϵ.