Zadanie 1.

Proszę znaleźć przybliżone rozwiązanie równania Laplace'a na płaszczyźnie:

$$\Delta f(x,y) = 0,$$

w kwadracie $[0,\pi] \times [0,\pi]$ z warunkami brzegowymi odpowiadającymi rozwiązaniu ścisłemu:

$$\Re e(\sin z + z), \quad z = x + iy.$$

W tym celu należy zdyskretyzować równanie dzieląc przedziały $[0,\pi]$ na $N-1$ podprzedziałów i użyć wyprowadzonego w Zad. 4 z Zestawu 3 wzoru. W wyniku dyskretyzacji otrzymujemy układ $(N-2)^2$ równań liniowych. Równanie przedstawić w postaci macierzowej:

$$A.x = b.$$

gdzie niewiadomymi x są wartości szukanej funkcji $f_{ij} \equiv f(x_i, x_j)$ w węzłach siatki o współrzędnych $\{x_i, y_j\}$.

Przeanalizować strukturę macierzy kwadratowej $(N-2)^2 \times (N-2)^2$:

- ilość elementów równych zero
- strukturę rozłożenia niezerowych elementów macierzy w zależności od kolejności równań i niewiadomych
- współczynnik uwarunkowania w zależności od N

Wygenerowany układ równań liniowych rozwiązać kilkoma sposobami, w tym:

- dekompozycja LU pełnej macierzy,
- jako macierz rzadką,
- jako macierz wielodiagonalną,
- iteracyjnie.
- inne metody wg. uznania i inwencji.

Dla powyższych metod porównać czas obliczeń i zużycie pamięci w zależności od N. Dokładność wyniku porównać z rozwiązaniem analitycznym.

Zadanie 2*.

Jak w Zad. 1, ale tym razem rozwiązujemy równanie Laplace'a w kole o promieniu $R = 1$, na którego brzegu zadano funkcję $u(\phi)$. Wynik porównać ze wzorem:

$$f(r,\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - \phi) + r^2}\, u(\phi)\, \mathrm{d}\phi.$$