

Zadanie 1.

Dana jest funkcja jednej zmiennej rzeczywistej, której wartości znamy tylko w skończonej liczbie równoodległych punktów. „Wyprowadzić”/podać wzór dwupunktowy na pierwszą pochodną funkcji 1 zmiennej:

$$f'(x_k) = \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{\Delta x}$$

Zaimplementować powyższy wzór w wybranym języku programowania, a następnie wyznaczyć zależność dokładności względnej i absolutnej od Δx dla wybranej funkcji elementarnej. Wartość Δx zmniejszać/zwiększać w postępie geometrycznym, np: $\Delta x = 2^{-n}$, $n = 0 \dots 64$.

Co dzieje się w miarę zbliżania się Δx do wartości „epsilon maszynowego” ϵ (ang. *machine epsilon*), czyli $\epsilon = 2^{-53}$ dla podwójnej precyzji (`double` w C)? Dla jakiej wartości Δx otrzymujemy najlepsze przybliżenie pochodnej?

Przeprowadzić analogiczną analizę dla trój- lub więcej punktowych przybliżeń pochodnej na siatce równoodległej.

Zadanie 2.

Wyprowadzić i zaimplementować wzór na różniczkowanie funkcji 1 zmiennej $f'(x)$ oraz $f''(x)$ dla którego tzw. *stencil* wygląda następująco:

2.1 X-X-fX-X-X,

2.2 X-X-fX-X,

2.3 fX-X-X-X,

2.3 f-X-X-X,

2.4 fX-X-X.

Litery fX oznaczają węzeł siatki w którym obliczamy pochodną, a X rozłożenie „sąsiadujących” węzłów wielomianu interpolacyjnego użytego do wyprowadzenia (włączając fX). Pojedyncza litera f oznacza, że węzeł ten NIE JEST używany do wielomianu interpolacyjnego (np: leży poza siatką numeryczną lub na innej siatce). Założyć, że rozłożenie węzłów jest równomierne, czyli zadane ciągiem arytmetycznym z krokiem Δx .

Zadanie 3.

Wyprowadzić i zaimplementować wzory na pierwszą i drugą pochodną, w sytuacji gdy węzły są rozmieszczone **geometrycznie**, czyli $x_k = x_0 q^k$, a *stencil* na postać:

3.1 X-fX-X,

3.2 f-X-X,

3.3 fX-X-X.

Zadanie 4.

Wyprowadzić i zaimplementować wzór numeryczny na **operator Laplace'a** Δ w dwóch wymiarach:

$$\Delta f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Pięciopunktowy *stencil* na płaszczyźnie wygląda następująco:

```
O—X—O
X—fX—X
O—X—O
```

gdzie O oznacza węzły siatki pominięte w obliczeniach.

Zadanie 5.

Obliczyć pochodne cząstkowe:

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},$$

w narożnym punkcie równoodległej siatki prostokątnej:

```
fX—X—X
X—X—O
X—O—O
```

Zadanie 6.

Obliczyć operator Laplace'a oraz pochodne cząstkowe jak w Zad. 4 i 5, ale na siatce złożonej z trójkątów równobocznych o boku Δx , gdzie *stencil* to wierzchołki sześciokąta foremnego, a pochodne obliczamy w jego środku.