

Zadanie 1.

Wyprowadzić/podać wzór dwupunktowy na pierwszą pochodną funkcji 1 zmiennej:

$$f'(x_k) = \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{\Delta x}$$

Zaimplementować powyższy wzór, a następnie obliczyć zależność dokładności względnej i absolutnej od Δx , zmniejszając jej wartość np: $\Delta x = 2^{-n}$, $n = 0 \dots 64$. Co dzieje się w miarę zbliżania się do wartości „epsilon maszynowego” ϵ (ang. *machine epsilon*), czyli $\epsilon = 2^{-53}$ dla podwójnej precyzji (`double` w C)? Dla jakiej wartości Δx otrzymujemy najlepsze przybliżenie pochodnej?

Zadanie 2.

Wyprowadzić i zaimplementować wzór różniczkowania funkcji 1 zmiennej $f'(x)$ oraz $f''(x)$ dla którego *stencil* wygląda następująco:

$$2.1 \quad X-X-fX-X-X,$$

$$2.2 \quad X-X-fX-X,$$

$$2.3 \quad fX-X-X-X,$$

$$2.3 \quad f-X-X-X,$$

$$2.4 \quad fX-X-X.$$

Litery fX oznaczają węzeł siatki w którym obliczamy pochodną, a X rozłożenie „sąsiadujących” węzłów wielomianu interpolacyjnego użytego do wyprowadzenia (włączając fX). Pojedyncza litera f oznacza, że węzeł ten NIE JEST używany do wielomianu interpolacyjnego (np: leży poza siatką numeryczną lub na innej siatce). Założyć, że rozłożenie węzłów jest równomierne, czyli zadane ciągiem arytmetycznym z krokiem Δx .

Zadanie 3.

Wyprowadzić i zaimplementować wzory na pierwszą i drugą pochodną, w sytuacji gdy węzły są rozmieszczone **geometrycznie**, czyli $x_k = x_0 q^k$, a *stencil* na postać:

$$3.1 \quad X-fX-X,$$

$$3.2 \quad f-X-X,$$

$$3.3 \quad fX-X-X.$$

Zadanie 4.

Wyprowadzić i zaimplementować wzór numeryczny na **operator Laplace'a** Δ w dwóch wymiarach:

$$\Delta f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Pięciopunktowy *stencil* na płaszczyźnie wygląda następująco:

O—X—O
X—fX—X
O—X—O

gdzie O oznacza węzły siatki pominięte w obliczeniach.

Zadanie 6*.

Obliczyć operator Laplace'a oraz pochodne cząstkowe jak w Zad. 4 i 5, ale na siatce złożonej z trójkątów równobocznych o boku Δx , gdzie *stencil* to wierzchołki sześciokąta foremnego, a pochodne obliczamy w jego środku.

Zadanie 5.

Obliczyć pochodne cząstkowe:

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},$$

w narożnym punkcie równoodległej siatki prostokątnej:

fX—X—X
X—X—O
X—O—O