

### Opis projektu

Celem jest bardzo dokładne obliczenie numerycznie całki postaci:

$$I[f(x)] = \int_0^{\pi} f(x) \sin x \, dx,$$

przy użyciu jak najmniejszej liczby wywołań funkcji  $f(x)$ , o której spodziewamy się, że jest bardzo złożona obliczeniowo, ale „gładka”. Wyliczenie wartości np:  $f(\pi/2)$  może zająć nawet kilka godzin. W tym celu należy wyprowadzić kwadraturę (typu) Gaussa:

$$I[W_{2n+1}(x)] \equiv \sum_{i=0}^n w_i W_n(x_i),$$

gdzie  $W_n(x)$  jest **dowolnym** wielomianem stopnia  $2n+1$ , a powyższa równość jest spełniona tożsamościowo.

Jako przybliżenie wartości całki przyjmujemy:

$$I[f(x)] \simeq \sum_{i=0}^n w_i f(x_i).$$

Testowe rozwiązanie *analytyczne* dla  $n = 1$ :

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\pi^2 - 8}, \\ x_1 &= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\pi^2 - 8}, \\ w_0 &= w_1 = 1 \end{aligned}$$

Przykładowe rozwiązanie *numeryczne* dla  $n = 2$ :

$$\begin{aligned} x_0 &= 0.5581950867965893545098494001963, \\ x_1 &= 1.5707963267948966192313216916398, \\ x_2 &= 2.5833975667932038839527939830832, \\ w_0 &= 0.4558404080391222561098574237169, \\ w_1 &= 1.0883191839217554877802851525663, \\ w_2 &= 0.45584040803912225610985742371686. \end{aligned}$$

Aby zaliczyć projekt należy zagadnienie rozwiązać dla istotnie większego  $n > 6$ . O funkcji  $f(x)$  można dodatkowo założyć, że jej pochodne na końcach przedziału  $f'(0) = f'(\pi) = 0$ .