6.1 Elementarne działania na wektorach

Dane są wektory:

$$\vec{a} = \{3, 4, -5\}, \quad \vec{b} = \{-1, 2, -3\}, \quad \vec{c} = \{0, 2, 12\}.$$

Oblicz:

$$\vec{a} - \vec{c}, \quad \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c}, \quad |\vec{a}|, \quad \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}), \quad \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$

6.2 Iloczyn wektorowy i skalarny

Oblicz iloczyn skalarny i wektorowy, kąt pomiędzy wektorami oraz długości wektorów:

$$\vec{u} = \{2, 0, -2\}, \qquad \vec{v} = \{-1, -1, -1\}. \tag{2}$$

Znajdź rzut i długość rzutu wektora $\vec{v}$ na wektor $\vec{u}$.

6.3 Wektory 4-wymiarowe

Znajdź (niezerowy) wektor prostopadły do każdego z wektorów równocześnie:

$$\mathbf{a} = \{1, 1, 1, 1\}, \quad \mathbf{b} = \{-1, -1, -1, 0\}, \quad \mathbf{c} = \{0, 0, 0, -1\}. \tag{3}$$

Wynik sprawdź za pomocą iloczynu skalarnego.

6.4 Tożsamości wektorowe

Udowodnij tożsamości wektorowe w trzech wymiarach:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{0}. \tag{4a}$$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \tag{4b}$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{d}) \tag{4c}$$

6.5 Twierdzenie Cayleya-Hamiltona

Dla macierzy:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \mathcal{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \emptyset = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

pokaż, że:

$$\mathcal{A}^2 - Tr(\mathcal{A})\,\mathcal{A} + Det(\mathcal{A})\,\mathcal{I} = \emptyset.$$

andrzej.odrzywolek@uj.edu.pl

6.6 Własności macierzy

Dana jest macierz $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Oblicz:

- wyznacznik macierzy $\mathcal{A}$
- ślad macierzy
- $\mathcal{A} \cdot \mathcal{A}$
- $\mathcal{A}^3$
- macierz odwrotną do $\mathcal{A}$
- wartości własne
- wektory własne
- wielomian charakterystyczny: współczynniki i rozkład na czynniki
- $Det(e^{\mathcal{A}})$

6.7 Równanie macierzowe

Rozwiązać równanie macierzowe:

$$\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} + \mathcal{A} = \mathcal{B}^2 - \mathcal{I}$$

gdzie:

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

a $\mathcal{I}$ to macierz jednostkowa.

6.8 Układy liniowe

Rozwiąż układ równań:

$$
\begin{aligned}
I_1 + I_2 &= I \\
I_3 + I_4 &= I_1 + I_2 \\
I_1 - I_5 &= I_3 \\
I_2 + I_5 &= I_4 \\
RI_5 + R_1 I_1 &= R_2 I_2 \\
R_2 I_3 - RI_5 &= R_1 I_4 \\
R_1 I_1 + R_2 I_3 &= U
\end{aligned}
$$

z niewiadomymi $I, I_1 \ldots I_5$ oraz parametrami R, R_1, R_2.
Oblicz stosunek $R_z = U/I$ wynikający z rozwiązania powyższego układu równań w następujących przypadkach:

a) $R \to 0$

b) $R \to \infty$

c) $R_1 = R_2$

d) dowolne R, R_1, R_2

6.9 Pierwiastek kwadratowy z macierzy

Rozwiąż równanie:

$$\mathcal{X}^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

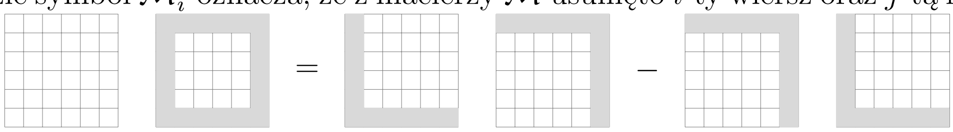
ze względu na niewiadomą rzeczywistą macierz $\mathcal{X}$.

6.10 Kondensacja Dogsona

Dla dowolnie wybranej macierzy kwadratowej $\mathcal{M}$, o rozmiarze większym niż 3×3 sprawdź, że zachodzi

$$\det(\mathcal{M}) \det(\mathcal{M}_{1,k}^{1,k}) = \det(\mathcal{M}_1^1) \det(\mathcal{M}_k^k) - \det(\mathcal{M}_1^k) \det(\mathcal{M}_k^1),$$

gdzie symbol $\mathcal{M}_i^j$ oznacza, że z macierzy $\mathcal{M}$ usunięto i-ty wiersz oraz j-tą kolumnę.



6.11 Transformacja unitarna

Oblicz wyrażenie:

$$\mathcal{U}^{-1} \cdot \mathcal{A} \cdot \mathcal{U}$$

gdzie:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

natomiast macierz $\mathcal{U}$ utworzona jest z pionowo ułożonych obok siebie wektorów własnych macierzy $\mathcal{A}$.

6.12 Analiza wektorowa

W trójwymiarowym układzie współrzędnych kartezjańskich $r = \{x, y, z\}$ dane jest pole wektorowe $\mathbf{v}$ o składowych

$$\mathbf{v} = \{y\sqrt{x^2 + y^2}, -x\sqrt{x^2 + y^2}, 0\}.$$

Obliczyć $\nabla \mathbf{v}$ (dywergencja, $\operatorname{div} \mathbf{v}$), $\nabla \times \mathbf{v}$ (rotacja, $\operatorname{rot} \mathbf{v}$), ∇v (gradient, $\operatorname{grad} v$) oraz

$$\frac{1}{2}\nabla(v^2) - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}).$$

Zwizualizować otrzymane pola wektorowe i skalarne.

andrzej.odrzywolek@uj.edu.pl