

5.1 Proste wyrażenia zespolone

(50% punktów do wyboru) Oblicz wyrażenia zespolone, podając w wyniku, o ile to możliwe, część rzeczywistą i urojoną, a także moduł i fazę (postać wykładnicza/trYGONOMETRYCZNA):

i^2	(1a)	i^i	(1f)	$\arcsin 2$	(1l)
$\sqrt{-1}$	(1b)	$(-1)^{-i}$	(1g)	$\Re\left(\sqrt{\sqrt{2} + \sqrt{2}i}\right)^2$	(1m)
$\frac{1}{i}$	(1c)	$\frac{\sqrt{2} + i}{\sqrt{2} - i}$	(1h)	$i^{i^{i^{i^{i^{i^{i^i}}}}}}}$	(1n)
$-i \ln(-1)$	(1d)	$(1 - i)^{-e}$	(1i)	$\frac{8i}{3(-2i(-\frac{16}{3} - \frac{i\pi}{2}) + \pi)}$	(1o)
$(1 + i)^{3/2}$	(1e)	e^i	(1j)		
		$e^{i\pi/4}$	(1k)		

5.2 Zespolone pierwiastkowanie

Oblicz, i przedstaw graficznie na płaszczyźnie zespolonej **wszystkie** pierwiastki 18-tego stopnia:

$$\sqrt[18]{1 - i}.$$

Zbadaj w jakiej kolejności numeruje je Mathematica.

5.3 Postać wykładnicza i trygonometryczna

Sprowadź sumę wyrażeń trygonometrycznych (harmonikę)

$$H = -2 \sin\left(\frac{\pi}{12} - x\right) + \sin(x) + \cos(x)$$

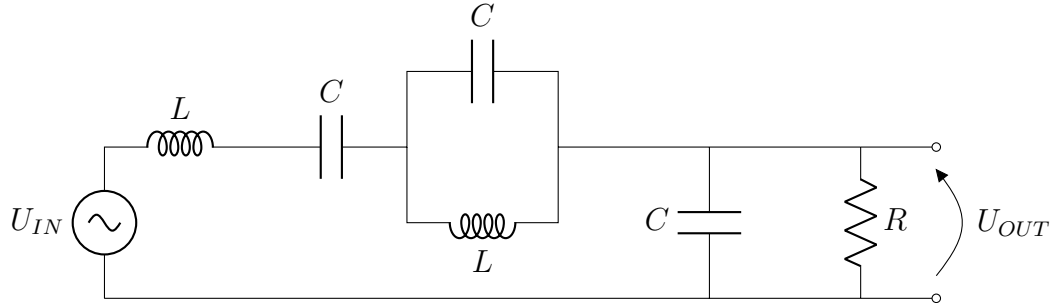
do postaci kanonicznej

$$H = a \cos x + b \sin x = A \sin(x - \phi) = \Re(\hat{A}e^{ix}).$$

Podaj rzeczywiste wartości a, b, A, ϕ oraz amplitudę zespoloną \hat{A} .

5.4 Obwód RLC

Dla obwodu sinusoidalnego prądu zmiennego o częstotliwości ω



obliczyć $A = U_{OUT}/U_{IN}$. Obliczenia są identyczne jak dla układu połączonych równoległe/szeregowo rezystorów, ale w przypadku kondensatorów i cewek należy użyć ich zespolonych impedancji Z_C, Z_L

$$C \rightarrow Z_C = \frac{1}{i\omega C}, \quad L \rightarrow Z_L = i\omega L.$$

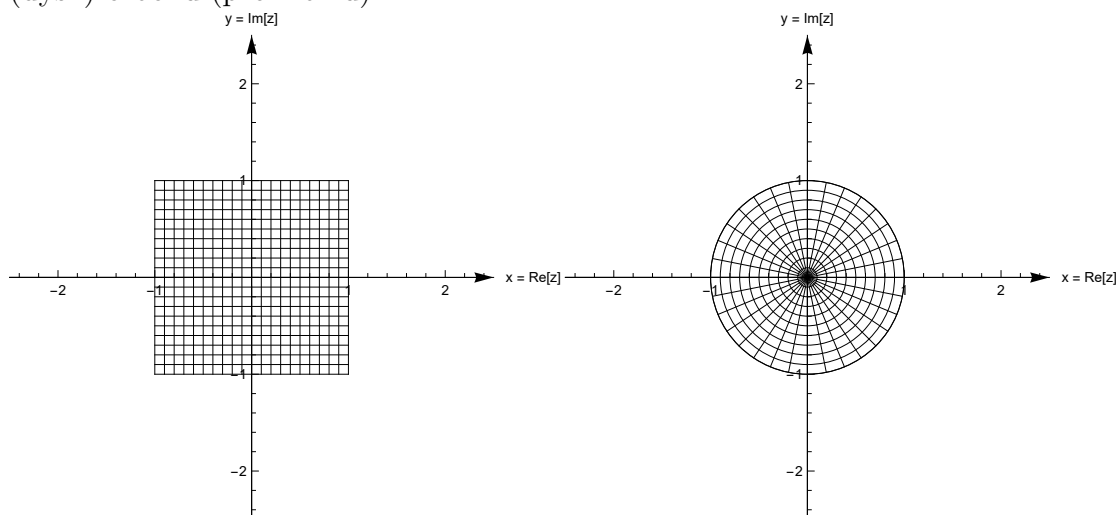
Alternatywnie, proszę poszukać wzoru na A w zestawach z ubiegłych lat.

Obliczyć część rzeczywistą $Re(A)$, urojoną $Im(A)$, moduł $|A|$ oraz fazę otrzymanego wyrażenia, gdzie R, L, C jest rzeczywiste i większe od zera.

Narysować wykres zależności modułu i fazy od $\omega \geq 0$ dla wybranych wartości R, L, C .

5.5 Przekształcenie konforemne

(50% podpunktów do wyboru) Na płaszczyźnie zespolonej $(x, y) \equiv (Re(z), Im(z))$ dana jest siatka kwadratowa (biegunowa) wypełniająca kwadrat (dysk) o boku (promieniu) 1



Jak zmieni się obraz kwadratu (dysku), jeżeli każdy punkt płaszczyzny zespolonej zostanie przekształcony za pomocą funkcji zespolonej $F(z)$ zadanej wzorem

$$z + z_0, \quad z_0 = const \quad (5a) \quad \operatorname{tg} z \quad (5e)$$

$$z_0 z, \quad z_0 = const \quad (5b) \quad \pm\sqrt{z} \quad (5f)$$

$$z^2/2 \quad (5c) \quad \frac{3}{4} z {}_2F_1\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{1}{z^3}\right) \quad (5g)$$

$$\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \quad (5d) \quad \frac{1-i}{\sqrt{2}} \operatorname{cn} \left(K\left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1+i}{2} z - 1 \right) \middle| \frac{1}{2} \right) \quad (5h)$$

Powyżej, z_0 jest stałą zespoloną, np: $z_0 = 2 + 3i$. Spróbuj wykonać analogiczne przekształcenia koła o promieniu 1.

5.6 Funkcje harmoniczne

Oblicz

$$f(x, y) = \Re \left[\frac{1}{1 + z^2} + \sin(\pi + z^2) \right], \quad z = x + iy.$$

Następnie podstaw obliczoną funkcję do laplacjanu

$$\Delta f(x, y)$$

i podaj wynik.

5.7 Potęgowanie w dziedzinie zespolonej

(50% punktów do wyboru) Znajdź wszystkie zespolone rozwiązania równania

$$z^\pi = 1 - i, \tag{6a}$$

$$z^{22/7} = 1 - i, \tag{6b}$$

$$\pi^z = 1 - i, \tag{6c}$$

$$\pi^{22/6} = 1 - i. \tag{6d}$$