4.1 Układy równań

Rozwiąż graficznie i symbolicznie układy równań (50% podpunktów do wyboru):

$$\begin{cases} 3x + 7y & = 11 \\ 12x - 4y & = 5 \end{cases} \tag{1a}$$

$$\begin{cases} 2|x| + 7y & = \max(-3, -x) \\ |2x - y| & = 5 \end{cases} \tag{1b}$$

$$\begin{cases} 2|x| + |2y| & = 6, \\ \max(|2x - y|, |2y - x|) & = 2 \end{cases} \tag{1c}$$

$$\begin{cases} \sin x + \cos y/2 & = 0 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} & = 3 \end{cases} \tag{1d}$$

$$\begin{cases} \tan^{-1} xy & = 4x/y \\ x^2 + y^2 & = 2x + 3 \end{cases} \tag{1e}$$

$$\begin{cases} x + y + z & = 1 \\ -x - y + z & = 2 \\ y + z & = -1 \end{cases} \tag{1f}$$

andrzej.odrzywolek@uj.edu.pl

4.2 Nierówności

Wprowadzenie Nierówności w fizyce służą m.in. do wyznaczania granic całkowania, np. określających dopuszczalny dla ruchu obszar w potencjale, przestrzeń fazową w fizyce statystycznej i teorii pola, momentów bezwładności itp. O ile współczesne oprogramowanie *pozwala* często na wykonywanie powyższych operacji **bez** rozwiązywania nierówności, to jawna znajomość granic obszaru znacząco upraszcza obliczenia, daje większe zrozumienie zachodzących zjawisk oraz dokładniejsze wyniki.

Rozwiąż graficznie i symbolicznie nierówności (50% podpunktów do wyboru)

$$x^2 + y^2 \leqslant 16 \tag{2a}$$

$$x^2 + y^2 \leqslant -6y \tag{2b}$$

$$|x| + |y| < 1 \tag{2c}$$

$$\begin{cases} |x| & < 2 \\ 2|x - 2y| & < 1 \end{cases} \tag{2d}$$

$$\begin{cases} |2\,|x| - y| - |x - |x|| & < 1 \\ \max\left(|x|, |y|\right) & < 5 \end{cases} \tag{2e}$$

$$\begin{cases} |x + y| < 2 \\ |x + z| < 2 \\ |y + z| < 2 \end{cases} \tag{2f}$$

andrzej.odrzywolek@uj.edu.pl

4.3 Całkowanie i rozkład cylindryczny w 2D

Wprowadzenie Standardowym zadaniem na ćwiczeniach rachunkowych z fizyki jest obliczanie różnego rodzaju całek wielokrotnych, opisujących objętości, środek masy, moment bezwładności, energię itp. itd. Kształty są zwykle zadane słownie, np. *oblicz środek ciężkości stożka.* Większość studentów ma spore trudności z przetworzeniem takiego opisu, nawet gdy dobrze rozumieją o jaką bryłę chodzi i potrafią ją sobie wyobrazić czy narysować, na granice całkowania w całce wielokrotnej. *Mathematica* generuje takie granice (rozwiązuje układ nierówności) algorytmem znanym jako *[algebraiczny] rozkład cylindryczny.*

Znajdź granice całkowania dla obszaru płaskiego zdefiniowanego poniżej. (50% podpunktów do wyboru)

$$\text{koło o promieniu 1 i środku w punkcie (0,0)} \tag{3a}$$

$$\text{koło o promieniu R i środku w punkcie (R,0)} \tag{3b}$$

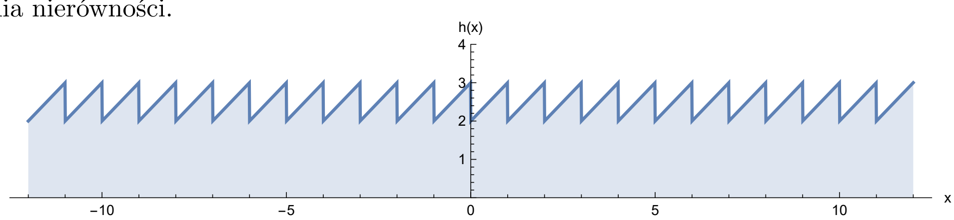
$$\text{trójkąt prostokątny o bokach długości 3,4,5, prostopadłe boki na osiach} \tag{3c}$$

$$\max(|x|, |y|) \leqslant 1 \tag{3d}$$

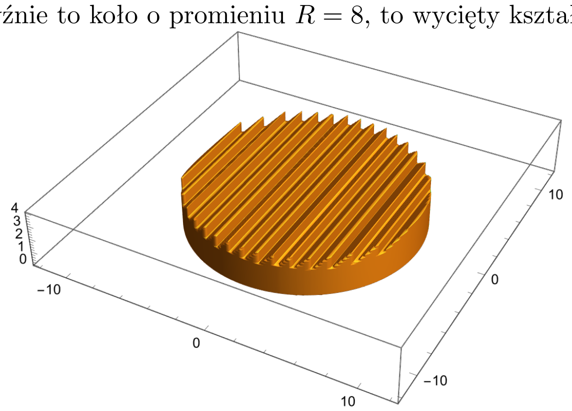
$$|x| + |y| < 1 \tag{3e}$$

$$\text{kwadrat o boku 3 wewnątrz którego wycięto koło o promieniu 1} \tag{3f}$$

Dla każdego przypadku oblicz pole figury na dwa sposoby: używając wbudowanych poleceń programu *Mathematica* oraz „tradycyjnie", zapisując całki w granicach wynikających z rozwiązania nierówności.



Następnie, zakładając, że kształt wycięto z karbowanego materiału w przekroju wyglądającego jak na rysunku powyżej, obliczyć objętość obiektu. Dla przykładu, jeżeli obszar na płaszczyźnie to koło o promieniu $R = 8$, to wycięty kształt będzie wyglądał jak poniżej.



4.4 Całkowanie i rozkład cylindryczny w 3D

Podobnie jak w poprzednim zadaniu, ale tym razem w 3D. (50% podpunktów do wyboru)

$$\text{kula o promieniu 1 i środku w punkcie (0,0),} \tag{4a}$$

$$\text{stożek o promieniu podstawy R oraz wysokości H,} \tag{4b}$$

$$\text{czworościan foremny,} \tag{4c}$$

$$\text{połowa kuli o promieniu R,} \tag{4d}$$

$$|x+y| < 1 \wedge |x+z| < 1 \wedge |y+z| < 1. \tag{4e}$$

$$\text{Torus o dużym promieniu } R \text{ i małym } r. \tag{4f}$$

Następnie oblicz objętość obiektu, oraz jego masę, zakładając, że gęstość spada od maksimum równego 1 w środku ukł. współrzędnych zgodnie ze wzorem $\rho(r) = 1 - r^2/144$, gdzie r jest odległością od centrum $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

4.5 Własności figury płaskiej

Dana jest figura płaska zdefinowana wnętrzem zamkniętej części wykresu funkcji uwikłanej

$$x^3 + 2xy + y^4 = 0. \tag{5}$$

Znajdź (50% podpunktów do wyboru)

- najmniejsze i największe wartości x i y w obszarze,
- pole figury,
- położenie jej środka ciężkości,
- momenty bezwładności względem osi Ox, Oy oraz osi prostopadłej do płaszczyzny xy i przechodzącej przez punkt $(0, 0)$,
- * obwód figury,
- * położenie punktu wewnętrznego najbardziej oddalonego od brzegu.

4.6 Własności figury płaskiej we współrzędnych biegunowych

Jak wyżej, ale krzywa jest zadana wzorem we współrzędnych biegunowych r, α:

$$r = \sqrt{\sin\alpha}, \qquad 0 \leqslant \alpha \leqslant \pi. \tag{6}$$

andrzej.odrzywolek@uj.edu.pl