

## 3.1 Różniczkowanie

**Wprowadzenie** Bez różniczkowania fizyka nie istnieje, podstawowe wielkości jak prędkość  $v = dx/dt$  czy przyspieszenie  $a = dv/dt = d^2x/dt^2$  są pochodnymi. *Mathematica* pozwala niemal natychmiast i zwykle bezbłędnie obliczać pochodne wyrażeń symbolicznych korzystając z **algebry różniczkowej**, czyli inaczej niż wprowadza się je na fizyce czy analizie matematycznej. Na NOF interesuje po prostu poprawny wynik.

### Zadania (50% podpunktów do wyboru)

Oblicz pochodne

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} e^{\sqrt{1+tg^2 x}}, & \quad (1a) & \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{2} (x'(t)^2 + y'(t)^2) - \frac{1}{2} (x(t)^2 + y(t)^2) \right], & \quad (1h) \\ \frac{d^2}{dx^2} \sqrt{1+x^2}, & \quad (1b) & \partial_t \int_0^{\sin t} x^x dx, & \quad (1i) \\ \frac{d^n}{dx^n} \exp(ax), & \quad (1c) & \frac{d}{dt} \int_{f(t)}^{g(t)} h(x) dx, & \quad (1j) \\ \frac{d^n \cos x}{dx^n} \text{ dla } n = 9, & \quad (1d) & \frac{d}{dx} x^x, & \quad (1k) \\ \frac{d|x|}{dx}, & \quad (1e) & \frac{df^{-1}(x)}{dx}, & \quad (1l) \\ \frac{\partial}{\partial t} \cos(\omega t + \phi), & \quad (1f) & \left( \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2}} \right)', & \quad (1m) \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \frac{xy}{x+y}, & \quad (1g) & & \end{aligned}$$

## 3.2 Obliczanie całki nieoznaczonej

**Wprowadzenie** Operacja odwrotna do różniczkowania, całkowanie, jest w fizyce jeszcze bardziej rozpowszechniona, ale ma zasłużoną opinię znacznie trudniejszej, niezależnie od istnienia algorytmów, które są ją w stanie wyznaczyć. Są one tak skomplikowane, np. **algorytm Risch**a opisany na 200 stronach, że niemal nigdy nie wspomina się o nich na ćwiczeniach rachunkowych, a nawet *Mathematica* zawiera tylko częściową implementację. Czasem całka to prosta odpowiedź na pytanie, jaką funkcję należy zróżniczkować, aby otrzymać f. wyrażenie podcałkowe. Bywa, że wynik jest bardzo trudny do uzyskania, zdarzają się błędne odpowiedzi. Dlatego należy przez różniczkowanie, graficznie i numerycznie sprawdzać uzyskane wyniki.

### Zadania (50% podpunktów do wyboru)

Wyznacz funkcje pierwotne:

$$\int e^{-x} \cos 2x \, dx, \quad (2a) \qquad \int \frac{dz}{\ln z^z}, \quad (2e)$$

$$\int \frac{dx}{x^4 + 1}, \quad (2b) \qquad \int dt \frac{2tF'}{f} - t^2 \frac{F'f'}{f^2} + \frac{t^2 F''}{f}, \quad (2f)$$

$$\int x^{\sqrt{x}} \, dx, \quad (2c)$$

$$\int \sqrt{x^4 + 1} \, dx, \quad (2d) \qquad \int \frac{dx}{x^4 - 1} \text{ dla } x > 1, \quad (2g)$$

$$\int 2x \ln(x^2 + 1)^{x^2} (\ln(x^2 + 1) \ln(\ln(x^2 + 1)) + 1) \, dx. \quad (2h)$$

Wynik sprawdź przez różniczkowanie, graficznie oraz numerycznie. Która z całek została obliczona błędnie przez program *Mathematica*?

### 3.3 Rozwijanie funkcji w szereg potęgowy (50% podpunktów do wyboru)

**Wprowadzenie** Umiejętność przybliżania wzorów fizycznych w przypadku małych wartości parametrów jest kluczową umiejętnością. Matematycznie oznacza to rozwijanie w szereg potęgowy, równoważny umiejętności obliczania wartości pochodnych w punkcie, zwykle jest to zero. Rozwiązań poniższych zadań dawniej uczono się po prostu na pamięć, obecnie powinniśmy przynajmniej szybko odtworzyć je w programie *Mathematica*.

Rozwiń w szereg potęgowy dookoła zera (szereg Maclaurina) poniższe funkcje. Określ (graficznie i numerycznie), ile wyrazów jest niezbędnych, aby dla  $x = 10^{-16}, 10^{-8}, 0.01, 0.1, 0.5, 1.0$  osiągnąć błąd względny przybliżenia co najmniej 1%. Określ maksymalną wartość  $x$ , dla której rozwinięcie do wyrazów rzędu  $O(x^5)$  daje błąd względny nie przekraczający 10%.

$$\sqrt{1+x}, \quad (3a) \qquad \frac{1}{1+x}, \quad (3f)$$

$$\sin x, \quad (3b)$$

$$\cos x, \quad (3c)$$

$$\operatorname{tg} x, \quad (3d)$$

$$\ln(1+x), \quad (3e)$$

$$E_k = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - mc^2, \quad x = v/c. \quad (3g)$$

$$x! \quad (3h)$$

Porównaj wykresy rozwinięcia w szereg z oryginalnymi funkcjami.

### 3.4 Transformacje i symetrie wykresów (50% punktów do wyboru)

Dla **zadanej osobno dla każdej osoby** funkcji  $f(x)$  zmiennej rzeczywistej  $x$  wygenerowanej losowo poniższymi poleceniami programu *Mathematica*:

```
Import["https://raw.githubusercontent.com/VA00/SymbolicRegressionPackage/master/SymbolicRegression.m"]
```

```
ZadanieNOF[]
```

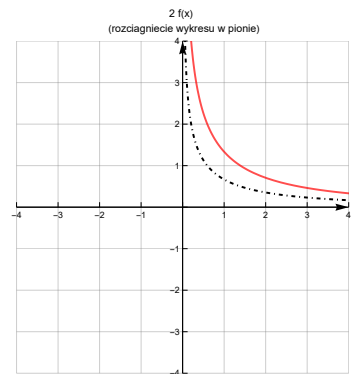
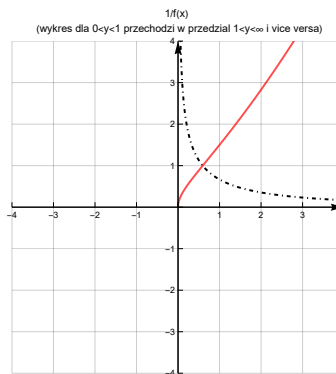
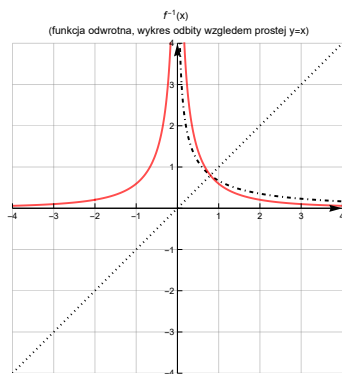
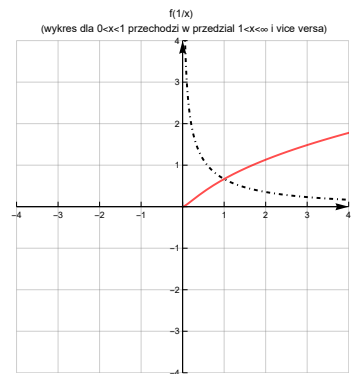
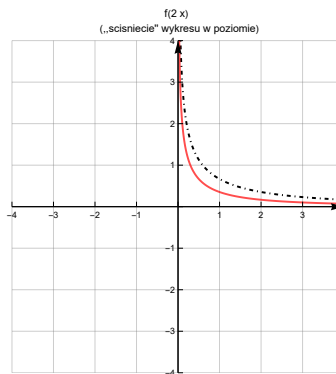
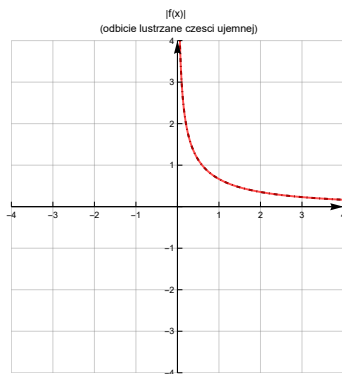
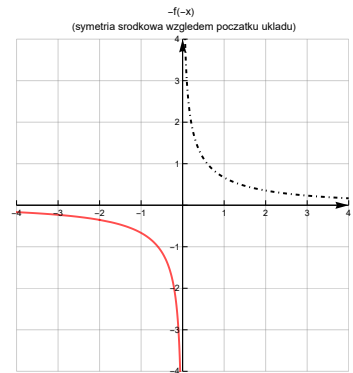
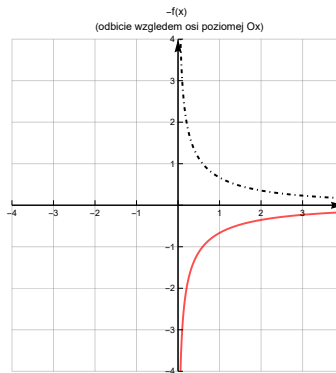
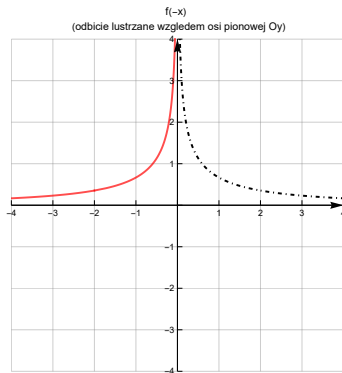
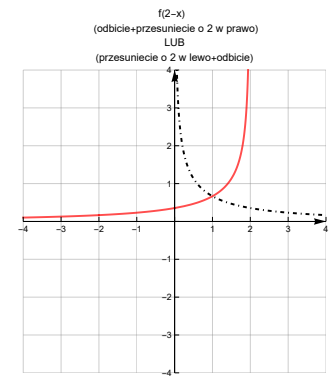
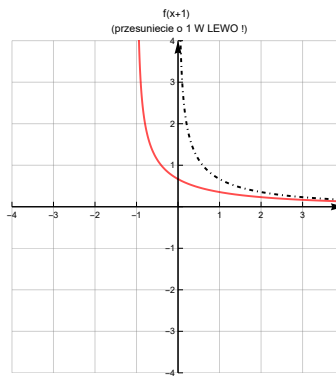
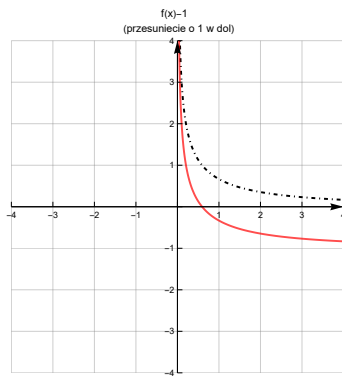
```
narysuj
```

$$\begin{array}{llll}
 f(x \pm 1), & (4d) & f(x) \pm 1, & (4h) & f^{-1}(x), & (4k) \\
 f(-x), & (4a) & f(2x), & (4e) & f(1/x), & (4i) & 2f(x), & (4l) \\
 -f(x), & (4b) & f(x/2), & (4f) & & & 2f(x/2), & (4m) \\
 -f(-x), & (4c) & |f(x)|, & (4g) & \frac{1}{f(x)}, & (4j) & f^{-1}(-x), & (4n)
 \end{array}$$

Opisz słownie graficzne transformacje, którym poddany został wykres funkcji.

**Wskazówka** Aby symetrie były wyraźnie widoczne, skale na osiach powinny być identyczne, a ich proporcje 1:1 (**AspectRatio**→1). Każdorazowo oryginalna funkcja musi być pokazana na wykresie, np. innym kolorem lub stylem. Na każdym wykresie w odmienny sposób zaznacz oryginał funkcji, tak aby wizualnie ocenić efekt przekształcenia, oraz oś/punkt symetrii.

Przykładowe poprawna odpowiedź na kolejnej stronie.



### 3.5 Badanie przebiegu funkcji

Zbadaj przebieg zmienności funkcji wygenerowanej w sposób podany w poprzednim zadaniu. Badanie funkcji obejmuje: dziedzinę, symetrie, miejsca zerowe i przecięcia z osiami, ekstrema, asymptoty i punkty przegięcia, rozwinięcia w szereg w zerze i asymptotyka w  $\infty$ . Końcowym rezultatem powinien być wykres w adekwatnej skali (liniowa, log lub log-log) z zaznaczonymi i opisanymi charakterystycznymi punktami wykresu. Zakres na osiach poziomej i pionowej finalnego wykresu powinien wynikać z analizy przebiegu funkcji. Wyznacz i naszkicuj na wykresie formuły przybliżone w zerze,  $\pm\infty$  oraz końcach dziedziny. Dobierz skalę i typ wykresu (liniowy, log, log-log) adekwatnie do wyników analizy. Jednostki na osiach dobierz tak, aby odpowiadały wartościom charakterystycznym, np: miejscom zerowym lub asymptotom.

Przykład dobrej odpowiedzi:

