

# 1.1 Wprowadzanie wyrażeń matematycznych.

**Zadanie (50% podpunktów do wyboru)** Przepisz wyrażenia w Mathematicie, oblicz numeryczną wartość i spróbuj znaleźć „najprostszą” postać poniższych wyrażeń, a następnie posortuj od najmniejszego do największego i zapisz wyniki ręcznie na kartce papieru lub za pomocą  $\text{\LaTeX}$  (Overleaf).

$$\frac{(10!)!}{6938710!!} \quad (1a)$$

$$|\log_2 1/3| + \text{sgn}(\pi^e - e^\pi) + \sqrt{2^\pi} + \exp(1/e) \quad (1b)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^5} \quad (1c)$$

$$1 + e^{\frac{1}{1 + \frac{1}{-1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{e}}}}} \quad (1d)$$

$$\text{tg}^{-1} \left( \text{tg} \frac{\pi}{18} \text{ctg} \frac{\pi}{9} \text{ctg} \frac{2\pi}{9} \right) \quad (1e)$$

$$\prod_{k=1}^{\infty} \sin k\pi \quad (1f)$$

$$\sqrt[3]{\pi^e e^\pi} \quad (1g)$$

$$(3^{7^{\frac{1}{7}}} - \sqrt[7]{3^7}) / 3^{7^{1/7}} \quad (1h)$$

$$\binom{10}{3} \quad (1i)$$

$$\prod_{k=1}^{\infty} \text{tg}^2 k \quad (1j)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{F_{2n} + i} \quad (1k)$$

$$\frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{\dots+1}+1}+1} + 1 \quad (1l)$$

$$\frac{1}{1 + \frac{e^{-2\pi}}{1 + \frac{e^{-4\pi}}{1 + \frac{e^{-6\pi}}{1 + \frac{e^{-8\pi}}{\dots}}}}} \quad (1m)$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\left(\frac{1}{4}\right)^{\left(\frac{1}{6}\right)^{\left(\frac{1}{8}\right)^{\left(\frac{1}{10}\right)^{\left(\frac{1}{12}\right)^{\dots}}}} \cdot \frac{1}{\infty} \quad (1n)$$

$$\sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + 4\sqrt{1 + 5\sqrt{1 + 6\sqrt{1 + 7\sqrt{1 + \dots}}}}}}}} \quad (1o)$$

$$\sqrt[3]{3}^{\sqrt[3]{3}^{\sqrt[3]{3}^{\sqrt[3]{3}^{\dots}}}} \quad (1p)$$

**Wskazówka** Nie każde zadanie da się rozwiązać po prostu wpisując i uruchamiając pojedyncze wbudowane polecenie. Wykorzystaj możliwości symboliczne, numeryczne i graficzne. Bądź przygotowany do porażki software, ale nie poddawaj się zbyt wcześnie, wykorzystaj wszystkie dostępne opcje, w tym AI (WolframGPT), czasem także rachunki ręczne/na kartce. *Mathematica* ma nam pomóc, a nie zastąpić myślenie.

## 1.2 Obliczanie wyrażeń fizycznych

**Zadanie (50% podpunktów do wyboru)** Oblicz wartość poniższych wyrażeń zawierających stałe i wielkości fizyczne w jednostkach układu SI. Następnie zidentyfikuj wyrażenia i oblicz ich wartość w innej, dowolnie wybranej jednostce adekwatnej do problemu.

$$\frac{2GM_{\oplus}}{c^2} \quad (2a) \qquad 1/\sqrt{\Lambda}/\sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \quad (2l)$$

$$\frac{4\pi\varepsilon_0\hbar c}{e^2} \quad (2b) \qquad \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} \quad (2m)$$

$$\frac{2\pi^5 k_B^4}{15h^3 c^2} \quad (2c) \qquad \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}} \quad (2n)$$

$$4\pi R_{\odot}^2 \sigma T_{\odot}^4 \quad (2d) \qquad \sqrt{\frac{\hbar c^5}{G}} \quad (2o)$$

$$\frac{3H_0^2}{8\pi G} \quad (2e)$$

$$\frac{GM_{\oplus}}{R_{\oplus}^2} \quad (2f) \qquad \frac{\sqrt{3\pi}}{2} \left(\frac{\hbar c}{G}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{m_u^2} \quad (2p)$$

$$\frac{\Lambda c^2}{3H_0^2} \quad (2g) \qquad \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \quad (2q)$$

$$\frac{5120\pi G^2 M_{\oplus}^3}{\hbar c^4} \quad (2h)$$

$$\frac{4\pi G\varepsilon_0 m_e m_p}{e^2} \quad (2i) \qquad \frac{m_e e^4}{8\varepsilon_0^2 h^3 c} \quad (2r)$$

$$\frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{e^2 m_e} \quad (2j) \qquad \frac{h}{\sqrt{2\pi m_{\text{H}} k_B T_{\odot}}} \quad (2s)$$

$$\frac{\hbar H_0}{4\pi k_B} \quad (2k) \qquad \frac{\sqrt{2}e^2}{8\sin^2\theta_W M_W^2} \quad (2t)$$

## 1.3 Wykresy funkcji 1 zmiennej

**Zadanie** Narysuj wykresy funkcji zadanych poniższymi wzorami. Które z powyższych funkcji mają identyczne wykresy? Jeżeli funkcje wyglądają identycznie, spróbuj przekształcić ich wzory lub wykazać w dowolny inny sposób, że są równoważne.

$$\begin{array}{lll}
 y = -x & (3a) & y = \log_2 x & (3e) & y = \frac{1}{1 + e^{-x}} & (3i) \\
 y = 1 - 2x^2 & (3b) & y = \frac{1+x}{1-x} & (3f) & y = \cos(2 \arcsin x) & (3j) \\
 y = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} & (3c) & y = 1 + \frac{1}{(1/x+1)^{-1} - 1} & (3g) & y = \exp(e^{\ln x + \ln \ln x}) & (3k) \\
 y = -\text{Li}_{-1}(x) & (3d) & y = e^{2 \operatorname{artgh} x} & (3h) & y = \frac{1}{2} + \frac{\tanh x/2}{2} & (3l)
 \end{array}$$

## 1.4 Rysowanie wielu funkcji

**Zadanie** Narysować na jednym wykresie i odpowiednio opisać kilka (naście) pierwszych (dla  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ ) funkcji specjalnych.

- wielomianów Legendere'a  $P_n(x)$ ,
- wielomianów Czybyszewa  $T_n(x)$ ,
- funkcji  $Y$  Bessela  $Y_n(x)$ ,
- polilogarytmów  $\text{Li}_n(x)$ .

**Wskazówka** Odpowiednie definicje można wyszukać w dokumentacji programu *Mathematica* a także na stronach internetowych, np. NIST Digital Library of Mathematical Functions <https://dlmf.nist.gov> lub Wikipedii.

## 1.5 Def. i podstawianie funkcji

**Zadanie (50% punktów do wyboru)** Oblicz  $f(x)$ ,  $f^2(x)$ ,  $f(x)^2$ ,  $f(x^2)$ ,  $f(2x)/2$ ,  $f^{-1}(x)$ ,  $f(x)^{-1}$ ,  $f(x^{-1})$ ,  $f'(x)$ ,  $f''(x)$ ,  $f''(x) + f(x)$ ,

$$\int f(x)dx, \quad \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{x} \frac{d}{dx} (xf(x)) \right), \quad \left[ \frac{\ddot{f}}{\dot{f}} - \frac{3}{2} \left( \frac{\dot{f}}{\dot{f}} \right)^2 \right] (x),$$

jeżeli  $f$  jest funkcją:

		sześcian (4i)	cosh (4q)
sin (4a)		podwojenie (4j)	cosh <sup>-1</sup> (4r)
cos (4b)		$\Gamma$ (4k)	arcsin (4s)
tg (4c)		! (4l)	exp (4t)
ln (4d)		artgh (4m)	wartość bezwzględna (4u)
$\sqrt{\quad}$ (4e)		$\sqrt[3]{\quad}$ (4n)	sgn (4v)
odwrotność (4f)		log <sub>2</sub> (4o)	zmiana znaku (4w)
następnik (4g)		sinh (4p)	połowa (4x)
kwadrat (4h)			

**Wskazówka** Poszukaj w dokumentacji lub zdefiniuj własne funkcje wykonujące operacje, np: odwrotność **Inv**, podnoszenie do kwadratu **Sqr**, sukcesor **Suc**, podwojenie **Dbl** itd. Alternatywnie, użyj tzw. „czystej funkcji” (rachunek  $\lambda$ ). Podstawienie najlepiej wykonać idiomatycznym **/.** (**ReplaceAll**).

## 1.6 Benchmark

Wykonać benchmark wydajności komputera w programie Wolfram Mathematica 14.1.0 Przesłać **wynik wraz z informacją o konfiguracji sprzętu** (procesor, pamięć, system operacyjny itd. zgodnie z tabelą) na mój adres e-mail.

Benchmark należy wykonać w domu na własnym sprzęcie/laptopie, korzystając z licencji home-use WFAIS, zob: <https://fais.uj.edu.pl/dla-studentow/studia-z-mathematica>.