

Odpowiedzi należy **zapisać osobno** w pliku tekstowym lub na kartce papieru, przeskanować/sfotografować i przesłać e-mailem wraz z plikiem **nb** z rozwiązaniami przed zakończeniem kolokwium.

Kolokwium trwa od 08:00 do 10:00. Rozwiązania należy przesłać **przed** godz. 10:30, opóźnienie skutkuje obniżeniem oceny o 0.5 stopnia za każde kolejne 15 min. Rozwiązania przesłane po 11:30 nie będą w ogóle brane pod uwagę.

Skala ocen: 4 popr. rozw. zad. - 3.0; 5 - 3.5; 6 - 4.0; 7 - 4.5; 8 - 5.0; 9 - 5+; 10 -  $\infty$ .

## Zadanie 1

Oblicz

$$\frac{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^{-1}}{\sum_{k=1}^{n+1} 2^k / k}$$

dla  $n$  równego miesiącowi Twoich urodzin.

## Zadanie 2

Dla jakich wartości rzeczywistego parametru  $\lambda$  równanie

$$\lambda x^6 - (\lambda + 7)x^2 + \lambda = 0,$$

nie posiada żadnych pierwiastków rzeczywistych.

## Zadanie 3

Wyznacz część rzeczywistą, urojoną, fazę i moduł liczby

$$z = \cos^{-1} (e^{\operatorname{artgh}^2}).$$

## Zadanie 4

Rozwiąż równanie

$$x \exp x = x^{x+1} \ln x.$$

## Zadanie 5

Z blachy o gęstości powierzchniowej  $8 \text{ kg/m}^2$  wycięto kształt zadany na płaszczyźnie  $x, y$  nierównością

$$\pi^2 - y^2 > |x|.$$

Współrzędne  $x, y$  wyrażono w metrach. Obliczyć pole powierzchni, masę i obwód figury. Wyznaczyć maksymalną rozciągłość w kierunku  $x$  i  $y$ . Obliczyć moment bezwładności względem punktu o maksymalnym  $y$

- w swojej płaszczyźnie  $x, y$ ,
- prostopadle do płaszczyzny  $x, y$ .

## Zadanie 6

Dla trójwymiarowych wektorów  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$  udowodnij, że zachodzi

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \mathbf{D} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D}) (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) + (\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) + (\mathbf{C} \cdot \mathbf{D}) (\mathbf{A} \times \mathbf{B}).$$

## Zadanie 7

Podaj wynik  $n$ -krotnego złożenia funkcji

$$F(x) = 1 + \frac{1}{x},$$

jeżeli  $n = 1/\cos^4(\operatorname{tg}^{-1} 3)$ .

## Zadanie 8

Ciało o masie  $m$  zostało wyrzucone pod kątem  $\alpha$  do poziomu z prędkością  $v_0$  i uderzyło w ziemię. Oblicz czas lotu, maksymalną wysokość i zasięg rzutu. Przyjmij uproszczone równanie ruchu:

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = m \mathbf{g} \left( 1 - \frac{2h}{R_{\oplus}} \right),$$

gdzie  $\mathbf{g}$  to wektor przyspieszenia grawitacyjnego,  $h$  - wysokość nad powierzchnią Ziemi, a  $R_{\oplus}$  to promień Ziemi. Wartości  $m > 0, v_0 > 0, 0 < \alpha < \pi/2$  proszę wybrać indywidualnie.

## Zadanie 9

Dana jest macierz kwadratowa

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 7 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix},$$

oraz wektor kolumnowy o składowych

$$B = \{11, -5, -7, -8, 2, -6, -8\}.$$

Rozwiąż ze względu na niewiadomy wektor  $X$  układ równań liniowych  $\mathcal{A}X = B$ . Oblicz  $\operatorname{Det}(e^{\mathcal{A}})$  i  $e^{\operatorname{Tr} \mathcal{A}}$ .

## Zadanie 10

Zbadaj przebieg funkcji wygenerowanej poleceniami programu *Mathematica*:

```
Import["https://raw.githubusercontent.com/VA00/SymbolicRegressionPackage/master/SymbolicRegression.m"]
ZadanieNOF2025[]
```