Odpowiedzi należy **zapisać ręcznie** na podpisanej kartce papieru, a plik **nb** z rozwiązaniami przesłać e-mailem po zakończeniu kolokwium.

Kolokwium trwa od 7:30 do 10:00.

Skala ocen: 4 popr. rozw. zad. - 3.0; 5 - 3.5; 6 - 4.0; 7 - 4.5; 8 - 5.0; 9 - 5+; 10 - ∞.

Zadanie 1

Rozwiąż równanie dla $x \in \mathbb{R}$

$$x^{x^{x^4}} = 4.$$

ODP: $x = \pm\sqrt{2} \simeq \pm 1.4142135623730950488016887242097$.

Zadanie 2

Dla jakich wartości rzeczywistego parametru λ równanie

$$\frac{x^4 - 2x}{4x - 1} = \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1}$$

posiada 2 różne pierwiastki rzeczywiste, o takiej samej wartości bezwzględnej?

ODP: $\lambda = 1/3$.

Zadanie 3

Dla rzeczywistego l uprość wyrażenie

$$\frac{1}{2} i \sqrt{l}\sqrt{1+l}\left(\frac{i}{\sqrt{l}\,\sqrt{1+l}} - \sqrt{-4 - \frac{1}{l(1+l)}}\right).$$

ODP:

$$\begin{cases} l & \text{dla} \quad l < -1, \\ -l-1 & \text{dla} \quad -1 < l \leqslant -1/2, \\ l & \text{dla} \quad l > 1/2. \end{cases}$$

Zadanie 4

Oblicz

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{F_{2^k}},$$

gdzie F_i są liczbami Fibonacciego, zdefiniowanymi rekurencyjnie jako

$$F_0 = 0, F_1 = 1, \quad F_i = F_{i-1} + F_{i-2.}$$

ODP: $3 - 1/\phi = \frac{1}{2}\left(7 - \sqrt{5}\right) \simeq 2.3819660112501051517954131656344$

andrzej.odrzywolek@uj.edu.pl

Zadanie 5

Z blachy metalowej o gęstości 8 kg/m^3, z jednej strony płaskiej a z drugiej cieniowanej tak aby jej grubość zadana była wzorem $z = 13 + 1/(1 + x^2)$ [mm], wycięto kształt zadany na płaszczyźnie x, y nierównością

$$|x^2 - y^2| + |2y|^2/2 < 143.$$

Współrzędne x, y wyrażono w metrach. Obliczyć pole powierzchni rzutu na płaszczyznę x, y jego obwód i położenie środka ciężkości. Wyznaczyć maksymalną wartość x i y wewnątrz obszaru. Obliczyć masę wyciętego kształtu, uwzględniając jego zmienną grubość.

ODP: Pole $= \frac{143}{6}\left(3\pi + 4\sqrt{3}\sinh^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) \simeq 333.353\,\mathrm{m}^2$; Obwód $= \sqrt{143}\left(\pi - 4iE\left(i\operatorname{csch}^{-1}\left(\sqrt{2}\right)|\frac{4}{3}\right)\right)$ $\simeq 72$ m; Środek ciężkości: $\{0, 0\}$; Maksymalny $x_{\max} = \sqrt{143} \simeq 11.9583$ [m], $y_{\max} = \sqrt{143/2} \simeq$ 8.45577[m]; Masa $= \frac{1}{750}\left(5571\pi + 3722\sqrt{3}\log\left(2 + \sqrt{3}\right) + 288\tan^{-1}\left(\frac{1}{12}\right) + 8\sqrt{426}\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{142}{3}}\right)\right)$ $\simeq 35.0018$ [kg].

Zadanie 6

Dla trójwymiarowych wektorów $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ udowodnij, że zachodzi

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})\,\mathbf{D} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})\,(\mathbf{B} \times \mathbf{C}) + (\mathbf{B} \cdot \mathbf{D})\,(\mathbf{C} \times \mathbf{A}) + (\mathbf{C} \cdot \mathbf{D})\,(\mathbf{A} \times \mathbf{B})\,.$$

ODP: Tożamość jest prawdziwa, wektory (3 składowe!) po lewej i prawej stronie są równoważne.

Zadanie 7

Podaj wynik n-krotnego złożenia funkcji

$$F(x) = 1 + \frac{1}{x},$$

jeżeli $n = 1/\cos^4\left(\mathrm{tg}^{-1}\,3\right)$.

ODP:

$$n = 100, \qquad \frac{F_n + F_{n+1}x}{F_{n-1} + F_n x} \simeq \phi - \frac{7.969699643945537 \times 10^{-42}}{x + 1/\phi} \simeq 1.61803 - \frac{7.969699643945537 \times 10^{-42}}{x + 0.618034} \simeq \phi.$$

F_n - liczby Fibonacciego, $F_{99} = 218922995834555169026 \simeq 2.18923 \times 10^{20}$, $F_{100} = 354224848179261915075 \simeq 3.54225 \times 10^{20}$, $F_{101} = 573147844013817084101 \simeq 5.73148 \times 10^{20}$.

Zadanie 8

Oblicz w układzie SI i posortuj wielkości fizyczne:

$$\frac{2GM_\oplus}{c^2},\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{m_e c^2},\ \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}},\ \frac{h}{m_e c},\ 1/\sqrt{\Lambda},\ \hbar/(m_e c\alpha),\ \left(\frac{45 k_B T_\odot R_\odot^3}{G M_\odot m_\mathrm{u}}\right)^{1/2},\ \frac{h}{\sqrt{\pi m_\mathrm{u} k_B T_\odot}}.$$

ODP:
$\left\{1.6 \times 10^{-35}, 2.8 \times 10^{-15}, 2.4 \times 10^{-12}, 3.25 \times 10^{-11}, 5.3 \times 10^{-11}, 8.87 \times 10^{-3}, 7.4 \times 10^{7}, 10^{26}\right\}$ [m].

andrzej.odrzywolek@uj.edu.pl

Zadanie 9

Dana jest macierz kwadratowa

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -1/12 & -1/11 & -1/10 & -1/9 & -1/8 \\ -1/7 & -1/6 & -1/5 & -1/4 & -1/3 \\ -1/2 & -1 & 121/125 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 \\ 1/8 & 1/9 & 1/10 & 1/11 & 1/12 \end{pmatrix},$$

oraz wektor kolumnowy o składowych

$$B = \{-13, -8, 36, -23, 32\}.$$

Rozwiąż ze względu na niewiadomy wektor X układ równań liniowych $\mathcal{A}.X = B$. Oblicz wyznacznik macierzy $e^{\mathcal{A}}$ oraz $e^{Tr\mathcal{A}}$.

ODP: $B = \{-2688, 1188, 10500, -11880, 3192\}$; $e^{Tr\mathcal{A}} = e^{121/125} \simeq 2.6326738428088615827411058299901$; $Det(e^{\mathcal{A}}) \simeq 2.6326738428088615827411058299901 \equiv e^{121/125} = e^{Tr\mathcal{A}}$.

Zadanie 10

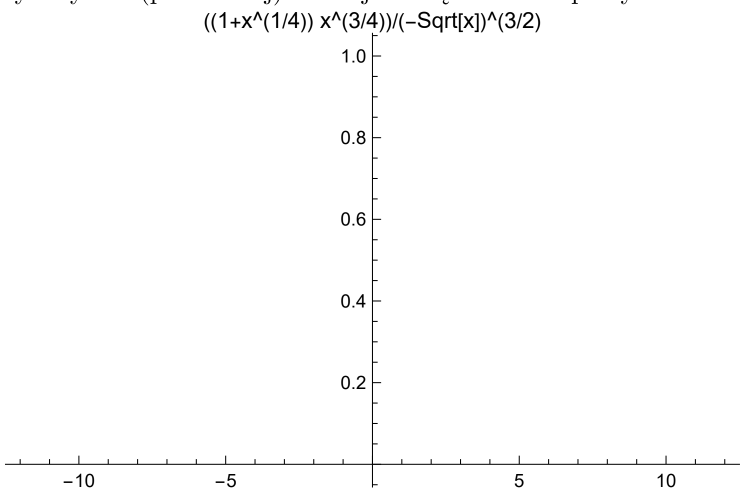
Zbadaj przebieg funkcji wygenerowanej poleceniami programu *Mathematica*:

```
Import["https://raw.githubusercontent.com/VA00/SymbolicRegressionPackage/master/SymbolicRegression.m"]
ZadanieNOF2024[]
```

Wylosowana funkcja:

$$\frac{(1 + x^{1/4})x^{3/4}}{(-\sqrt{x})^{3/2}}.$$

ODP: Funkcja nie jest określona dla żadnego $x \in \mathbb{R}$. Innymi słowy, dziedziną funkcji jest zbiór pusty. Wykres (patrz niżej) także jest więc zbiorem pustym.



andrzej.odrzywolek@uj.edu.pl