Odpowiedzi należy **zapisać ręcznie** na podpisanej kartce papieru, a plik **nb** z rozwiązaniami przesłać e-mailem po zakończeniu kolokwium.

Kolokwium trwa od 7:30 do 10:00.

Skala ocen: 4 popr. rozw. zad. - 3.0; 5 - 3.5; 6 - 4.0; 7 - 4.5; 8 - 5.0; 9 - 5+; 10 - ∞.

Zadanie 1

Rozwiąż równanie dla $x \in \mathbb{R}$

$$x^{x^{x^4}} = 4.$$

Zadanie 2

Dla jakich wartości rzeczywistego parametru λ równanie

$$\frac{x^4 - 2x}{4x - 1} = \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1}$$

posiada 2 różne pierwiastki rzeczywiste, o takiej samej wartości bezwzględnej?

Zadanie 3

Dla rzeczywistego l uprość wyrażenie

$$\frac{1}{2} i \sqrt{l}\sqrt{1+l}\left(\frac{i}{\sqrt{l}\,\sqrt{1+l}} - \sqrt{-4 - \frac{1}{l(1+l)}}\right).$$

Zadanie 4

Oblicz

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{F_{2^k}},$$

gdzie F_i są liczbami Fibonacciego, zdefiniowanymi rekurencyjnie jako

$$F_0 = 0, F_1 = 1, \quad F_i = F_{i-1} + F_{i-2.}$$

Zadanie 5

Z blachy metalowej o gęstości 8 kg/m^3, z jednej strony płaskiej a z drugiej cieniowanej tak aby jej grubość zadana była wzorem $z = 13 + 1/(1 + x^2)$ [mm], wycięto kształt zadany na płaszczyźnie x, y nierównością

$$|x^2 - y^2| + |2y|^2/2 < 143.$$

Współrzędne x, y wyrażono w metrach. Obliczyć pole powierzchni rzutu na płaszczyznę x, y jego obwód i położenie środka ciężkości. Wyznaczyć maksymalną wartość x i y wewnątrz obszaru. Obliczyć masę wyciętego kształtu, uwzględniając jego zmienną grubość.

andrzej.odrzywolek@uj.edu.pl

Zadanie 6

Dla trójwymiarowych wektorów $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ udowodnij, że zachodzi

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})\, \mathbf{D} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})\, (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) + (\mathbf{B} \cdot \mathbf{D})\, (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) + (\mathbf{C} \cdot \mathbf{D})\, (\mathbf{A} \times \mathbf{B})\,.$$

Zadanie 7

Podaj wynik n-krotnego złożenia funkcji

$$F(x) = 1 + \frac{1}{x},$$

jeżeli $n = 1/\cos^4\left(\mathrm{tg}^{-1}\, 3\right)$.

Zadanie 8

Oblicz w układzie SI i posortuj wielkości fizyczne:

$$\frac{2GM_{\oplus}}{c^2},\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{m_e c^2},\ \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}},\ \frac{h}{m_e c},\ 1/\sqrt{\Lambda},\ \hbar/(m_e c\alpha),\ \left(\frac{45 k_B T_{\odot} R_{\odot}^3}{G M_{\odot} m_{\mathrm{u}}}\right)^{1/2},\ \frac{h}{\sqrt{\pi m_{\mathrm{u}} k_B T_{\odot}}}.$$

Zadanie 9

Dana jest macierz kwadratowa

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -1/12 & -1/11 & -1/10 & -1/9 & -1/8 \\ -1/7 & -1/6 & -1/5 & -1/4 & -1/3 \\ -1/2 & -1 & 121/125 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 \\ 1/8 & 1/9 & 1/10 & 1/11 & 1/12 \end{pmatrix},$$

oraz wektor kolumnowy o składowych

$$B = \{-13, -8, 36, -23, 32\}.$$

Rozwiąż ze względu na niewiadomy wektor X układ równań liniowych $\mathcal{A}.X = B$. Oblicz wyznacznik macierzy $e^{\mathcal{A}}$ oraz $e^{Tr\mathcal{A}}$.

Zadanie 10

Zbadaj przebieg funkcji wygenerowanej poleceniami programu *Mathematica*:

```
Import["https://raw.githubusercontent.com/VA00/SymbolicRegressionPackage/master/SymbolicRegression.m"]
ZadanieNOF2024[]
```

andrzej.odrzywolek@uj.edu.pl