8.1 R.r. zwyczajne

Znajdź rozwiązanie ogólne równań różniczkowych zwyczajnych:

$$y'(x) = x^n \tag{1a}$$

$$y'(x) = y + e^x \tag{1b}$$

$$y'(x) = y \sin x \tag{1c}$$

$$y'(x) = 1/y(x) \tag{1d}$$

$$y'(x) = \sinh x + xy(x) \tag{1e}$$

$$y''(x) = y \tag{1f}$$

$$y'' = 1/y \tag{1g}$$

$$y'' = 1/\sqrt{y} \tag{1h}$$

$$y'' = y^2 \tag{1i}$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = 0 \tag{1j}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{dy}{dx} + x^5 \tag{1k}$$

$$\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx} + y\right) = y \tag{1l}$$

$$y''' = y + y' + y'' \tag{1m}$$

Narysuj rodziną rozwiązań otrzymaną dla różnych wartości stałych całkowania. Sprawdź wynik podstawiając go do równania i upraszczając.

8.2 Krzywe całkowe

Znajdź i narysuj rozwiązanie równania różniczkowego przechodzące przez punkt $\{1, 1\}$ dla:

$$y' = \cos x + y \tag{2a}$$

$$y' = 1/y \tag{2b}$$

$$y'' = x^2 \tag{2c}$$

$$y' = -\sqrt{-y} \tag{2d}$$

$$y' = 6y^2 \tag{2e}$$

$$y' = \sin y \tag{2f}$$

$$y' = \ln y \tag{2g}$$

$$y' = \ln(1 + y) \tag{2h}$$

8.3 Zagadnienie początkowe dla oscylatora harmonicznego

Znajdź i narysuj rozwiązanie zagadnienia początkowego dla równania:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, x(0) = 0, \dot{x}(0) = v_0 \tag{3a}$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \sin \omega t, x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0 \tag{3b}$$

8.4 Układy r.r. zwyczajnych

Rozwiąż układ równań różniczkowych zwyczajnych i narysuj jego krzywe całkowe

andrzej.odrzywolek@uj.edu.pl

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases} \tag{4a}$$

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases} \tag{4b}$$

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{x} \\ x' = \frac{1}{y} \end{cases} \tag{4c}$$

$$\begin{cases} y' = -x + \cos x \\ x' = y - \sin y \end{cases} \tag{4d}$$

8.5 Oscylator harmoniczny

Sprawdź rozwiązanie ogólne równania oscylatora harmonicznego

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \tag{5}$$

postawiając podane niżej **funkcje** do równania (5)

$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi), x(t) = (a + b\,i)\; e^{i\omega t}, x(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t.$$

8.6 Zagadnienie początkowe z dowolną funkcją

Znajdź rozwiązanie równania, gdzie $f(t)$ jest dowolną funkcją

$$\ddot{x} + x = f(t)$$

z warunkami początkowymi $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0$.

Po otrzymaniu rozwiązania dla dowolnego f, wstaw w jej miejsce

$$f(t) = 0, \tag{6a}$$

$$f(t) = 1, \tag{6b}$$

$$f(t) = \sin 2t, \tag{6c}$$

$$f(t) = \sin \pi t, \tag{6d}$$

$$f(t) = e^{-(t-t_0)^2}, \tag{6e}$$

$$f(t) = \delta(t - t_0). \tag{6f}$$

8.7 Rzut ukośny w jednorodnym polu grawitacyjnym

Kula wolframowa o masie $m = 100$ kg została wystrzelona pod kątem $\alpha = 4/3$ rad z prędkością 1600 m/s. Obliczyć czas lotu, zasięg rzutu oraz maksymalną wysokość w następujących przypadkach:

1. rzutu w jednorodnym polu grawitacyjnym bez oporu powietrza

2. przy założeniu, że opór aerodynamiczny zależy liniowo od prędkości ze współczynnikiem danym wzorem Stokesa; lepkość powietrza pobrać za pomocą

ChemicalData["DryAir", "Viscosity"] Równanie ruchu z oporem powietrza ma postać

$$m\,\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = m\,\vec{g} - k\,\frac{d\vec{x}}{dt}$$

gdzie m-masa, k-wsp. oporu pow., $\vec{g} = \{0, -g\}$ - przysp. ziemskie.

3. przy założeniu, że moduł siły oporu powietrza ma postać:

$$F = \frac{1}{2}\,\rho\,C_d\,A\,v^2,$$

gdzie ρ - gęstość powietrza, A - powierzchnia czołowa. Współczynnik oporu C_d przyjąć dla liczby Reynoldsa odpowiadającej prędkości początkowej i lepkości suchego powietrza. Wartości można wziąć np: z WolframAlpha.

4. rozszerzyć powyższy model o zależność gęstości powietrza od wysokości zgodnie ze wzorem barometrycznym.

5. dodać obrót kuli na którą działa siła nośna prostopadła do kierunku lotu o wartości proporcjonalnej do iloczynu prędkości liniowej i kątowej.

Porównać tory lotu i zależność prędkości od czasu dla wszystkich kombinacji powyższych przypadków.

8.8 Rzut balonem

Arystoteles twierdził, że ciało wyrzucone pod kątem porusza się po linii prostej aż do momentu utraty „pędu", po czym spada pionowo w dół. Pokazać, rozwiązując równania ruchu w jednorodnym polu grawitacyjnym z dużym oporem powietrza, że są sytuacje dla których tor rzeczywiście wygląda bardzo podobnie do opisanego przez Arystotelesa.