

6.1 Proste wyrażenia zespolone

Oblicz wyrażenia zespolone, podając w wyniku, o ile to możliwe, część rzeczywistą i urojoną, a także moduł i fazę (postać wykładnicza/trYGONOMETRYCZNA):

$$\begin{array}{llll}
 i^2 & (1a) & i^i & (1f) & e^{i\pi/4} & (1k) \\
 \sqrt{-1} & (1b) & (-1)^{-i} & (1g) & \arcsin 2 & (1l) \\
 \frac{1}{i} & (1c) & \frac{\sqrt{2} + i}{\sqrt{2} - i} & (1h) & \Re\left(\sqrt{\sqrt{2} + \sqrt{2}i}\right)^2 & (1m) \\
 -i \ln(-1) & (1d) & (1 - i)^{-e} & (1i) & & \\
 (1 + i)^{3/2} & (1e) & e^i & (1j) & i^{i^{i^{i^{i^i}}}} & (1n)
 \end{array}$$

6.2 Zespolone pierwiastkowanie

Oblicz, i przedstaw graficznie na płaszczyźnie zespolonej **wszystkie** pierwiastki 18-tego stopnia:

$$\sqrt[18]{1 - i}.$$

6.3 Postać wykładnicza i trygonometryczna

Sprowadź sumę wyrażeń trygonometrycznych (harmonikę)

$$H = -2 \sin\left(\frac{\pi}{12} - x\right) + \sin(x) + \cos(x)$$

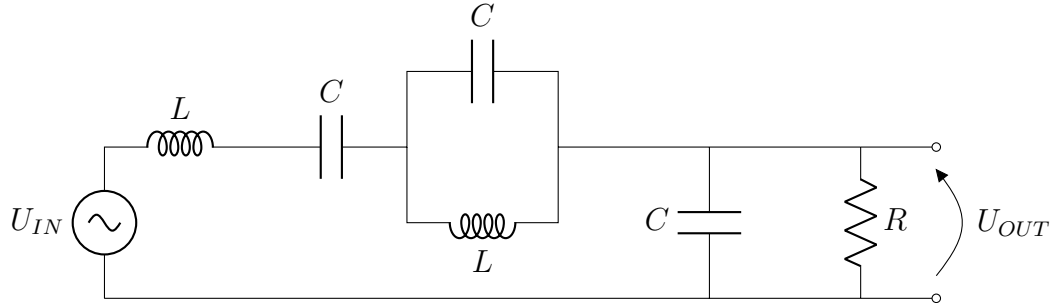
do postaci kanonicznej

$$H = a \cos x + b \sin x = A \sin(x - \phi) = \Re\left(\hat{A}e^{ix}\right).$$

Podaj rzeczywiste wartości a, b, A, ϕ oraz amplitudę zespoloną \hat{A} .

6.4 Obwód RLC

Dla obwodu sinusoidalnego prądu zmiennego o częstotliwości ω



obliczyć $A = U_{OUT}/U_{IN}$. Obliczenia są identyczne jak dla układu połączonych równoległe/szeregowo rezystorów, ale w przypadku kondensatorów i cewek należy użyć ich zespolonych impedancji Z_C, Z_L

$$C \rightarrow Z_C = \frac{1}{i\omega C}, \quad L \rightarrow Z_L = i\omega L.$$

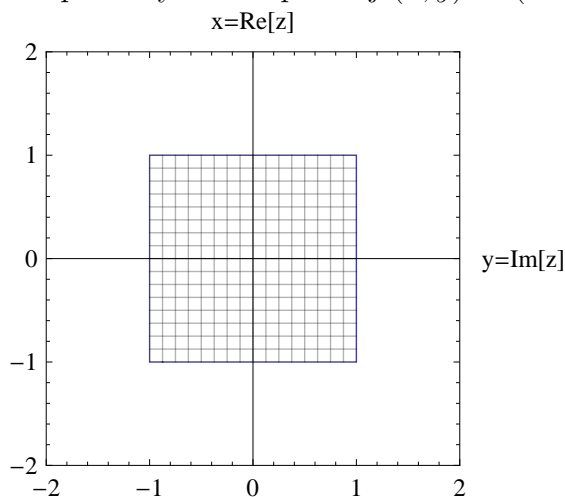
Alternatywnie, proszę poszukać wzoru na A w zestawach z ubiegłych lat.

Obliczyć część rzeczywistą $Re(A)$, urojoną $Im(A)$, moduł $|A|$ oraz fazę otrzymanego wyrażenia, gdzie R, L, C jest rzeczywiste i większe od zera.

Narysować wykres zależności modułu i fazy od $\omega \geq 0$ dla wybranych wartości R, L, C .

6.5 Przekształcenie konforemne

Na płaszczyźnie zespolonej $(x, y) \equiv (\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z))$ dany jest kwadrat o boku 1:



Jak zmieni się obraz kwadratu, jeżeli każdy punkt płaszczyzny zespolonej zostanie przekształcony za pomocą funkcji zespolonej $F(z)$, gdzie:

$$F(z) = z + z_0, \quad z_0 = \text{const} \quad (5a)$$

$$F(z) = z_0 z, \quad z_0 = \text{const} \quad (5b)$$

$$F(z) = z^2/2 \quad (5c)$$

$$F(z) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \quad (5d)$$

$$F(z) = \operatorname{tg} z \quad (5e)$$

$$F(z) = \pm \sqrt{z} \quad (5f)$$

Powyżej, z_0 jest stałą zespoloną, np: $z_0 = 2 + 3i$. Spróbuj wykonać analogiczne przekształcenia koła o promieniu 1.

6.6 Funkcje harmoniczne

Proszę sprawdzić rozwiązanie równania Laplace'a na płaszczyźnie

$$\Delta f(x, y) = 0,$$

w postaci części rzeczywistej wyrażenia zespolonego

$$f(x, y) = \Re \left[\frac{1}{1 + z^2} + \sin(\pi + z^2) \right], \quad z = x + iy.$$

6.7 Potęgowanie w dziedzinie zespolonej

Znajdź wszystkie zespolone rozwiązania równania $z^\pi = 1 - i$.