4.1 Nierówności

Wprowadzenie Nierówności w fizyce służą m.in. do wyznaczania granic całkowania, np. określających dopuszczalny dla ruchu obszar w potencjale, przestrzeń fazową w fizyce statystycznej i teorii pola, momentów bezwładności itp. O ile współczesne oprogramowanie *pozwala* często na wykonywanie powyższych operacji **bez** rozwiązywania nierówności, to jawna znajomość granic obszaru znacząco upraszcza obliczenia, daje większe zrozumienie zachodzących zjawisk oraz dokładniejsze wyniki.

Rozwiąż graficznie i symbolicznie nierówności:

$$x^6 - 3x^5 + 3x^4 - x^3 \leqslant 0 \tag{1a}$$

$$\sin x < 0 \tag{1b}$$

$$|1/x| \geqslant 1 \tag{1c}$$

$$\cos(2x) < \sin^2 x \tag{1d}$$

$$|2\,|x| - x| - |x - |x|| < 1 \tag{1e}$$

$$x^x < \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}} \tag{1f}$$

4.2 Rozkład cylindryczny w 2D

Wprowadzenie Standardowym zadaniem na ćwiczeniach rachunkowych z fizyki jest obliczanie różnego rodzaju całek wielokrotnych, opisujących objętości, środek masy, moment bezwładności, energię itp. itd. Kształty są zwykle zadane słownie, np. *oblicz środek ciężkości stożka*. Większość studentów ma spore trudności z przetworzeniem takiego opisu, nawet gdy dobrze rozumieją o jaką bryłę chodzi i potrafią ją sobie wyobrazić czy narysować, na granice całkowania w całce wielokrotnej. *Mathematica* generuje takie granice (rozwiązuje układ nierówności) algorytmem znanym jako *[algebraiczny] rozkład cylindryczny)*.

Znajdź granice całkowania (równoważnie: rozwiąż jawnie nierówność) we współrzędnych kartezjańskich (x, y) (*rozkład cylindryczny*) dla obszaru płaskiego zdefiniowanego jako:

$$\text{koło o promieniu 1 i środku w punkcie (0,0)} \tag{2a}$$

$$\text{koło o promieniu R i środku w punkcie (R,0)} \tag{2b}$$

$$\text{trójkąt prostokątny o bokach długości 3,4,5, prostopadłe boki na osiach} \tag{2c}$$

$$\max(|x|, |y|) \leqslant 1 \tag{2d}$$

$$|x| + |y| < 1 \tag{2e}$$

$$\text{kwadrat o boku 3 wewnątrz którego wycięto koło o promieniu 1} \tag{2f}$$

Dla każdego przypadku oblicz pole figury na dwa sposoby: używając wbudowanych poleceń programu *Mathematica* oraz „tradycyjnie”, zapisując całki w granicach wynikających z rozwiązania nierówności.

andrzej.odrzywolek@uj.edu.pl

4.3 Rozkład cylindryczny w 3D

Znajdź granice całkowania we wspólrzędnych kartezjańskich (x, y, z) (*rozkład cylindryczny*) dla obszaru trójwymiarowego zdefiniowanego jako:

$$\text{kula o promieniu 1 i środku w punkcie (0,0),} \tag{3a}$$

$$\text{stożek o promieniu podstawy R oraz wysokości H,} \tag{3b}$$

$$\text{czworościan foremny,} \tag{3c}$$

$$\text{połowa kuli o promieniu R,} \tag{3d}$$

$$|x+y| < 1 \wedge |x+z| < 1 \wedge |y+z| < 1. \tag{3e}$$

4.4 Własności figury płaskiej

Dana jest figura płaska zdefinowana wnętrzem zamkniętej części wykresu funkcji uwikłanej

$$x^3 + 2xy + y^4 = 0. \tag{4}$$

Znajdź

- najmniejsze i największe wartości x i y w obszarze,
- pole figury,
- położenie jej środka ciężkości,
- momenty bezwładności względem osi Ox, Oy oraz osi prostopadłej do płaszczyzny xy i przechodzącej przez punkt $(0, 0)$,
- * obwód figury,
- * położenie punktu wewnętrznego najbardziej oddalonego od brzegu.

4.5 Własności figury płaskiej we współrzędnych biegunowych

Jak wyżej, ale krzywa jest zadana wzorem we współrzędnych biegunowych r, α:

$$r = \sqrt{\sin\alpha}, \qquad 0 \leqslant \alpha \leqslant \pi. \tag{5}$$

andrzej.odrzywolek@uj.edu.pl