2.1 Rozwiązywanie równań z jedną niewiadomą

Wprowadzenie Po pojęciem rozwiązania równania ze względu na **rzeczywistą** niewiadomą x rozumiemy jakąkolwiek użyteczną informację na temat lokalizacji i ilości rozwiązań na osi liczbowej. Przykłady **ODPOWIEDZI** to

- $x < -12$,
- $1 < x < 2$,
- $x = 0.24 \pm 0.04$,
- $x = 0.12345$,
- $x = 3.14159265354237894398779879879834897 45$,
- x jest liczbą algebraiczną, najmniejszym rozwiązaniem r. wielomianowego $x^6 + 2x - 4 = 0$,
- $x = \sqrt{1+\pi}$,
- $x = 1/137$,
- $x = 0$.

Nie każda z powyższych odpowiedzi ma taką samą wartość, ale każda jest lepsza od braku odpowiedzi lub odpowiedzi błędnej. Zostały posortowane od najmniej precyzyjnej i niedokładnej, ale najłatwiejszej do uzyskania dla najszerszej klasy problemów, poprzez coraz dokładniejsze wyniki numeryczne (liczby zmiennoprzecinkowe sprzętowe, dowolnej precyzji, *ball-arithmetic*, arytmetyka interwałowa) kończąc na ścisłych wynikach analitycznych/symbolicznych, możliwych do znalezienia dla bardzo wąskiej klasy preselekcjowanych zadań.

Prawidłowa kolejność rozwiązywania równań to:

(1) metoda graficzna **Plot**, **ListPlot** — na wykresie wizualnie oceniamy czy wykresy lewej i prawej strony przecinają się i w jakim miejscu; zmieniając skalę jesteśmy w stanie **dowolnie dokładnie** rozwiązać KAŻDE równanie

(2) metoda numeryczna **FindRoot**,**NSolve** — korzystając z odczytanych na wykresie wartości podajemy wartości startowe lub przedział do przeszukania numerycznie,

(3) metody symboliczne **Solve**, **Reduce**, **FindInstance** stosujemy **na końcu**, jeżeli z wykresu wiemy gdzie spodziewać się rozwiązania, a z metod numerycznych znamy jego przybliżoną wartość.

Zadania

Rozwiąż równania ze względu na **rzeczywistą** niewiadomą x:

$$x = 2e^{-x} \tag{1a}$$

$$x^7 - 2x^5 - x^2 + x + 1 = 0 \tag{1b}$$

$$e^{1/x} = \Gamma(x) \tag{1c}$$

$$\sqrt{1+\sqrt{x}} = 2 - \mathrm{I}_0(x) \tag{1d}$$

$$\cos(4x+\pi) = \sin(2x) + 2 \tag{1e}$$

$$\exp(x) - 2 = \sin x \tag{1f}$$

$$e^{-2/(x-1)} = \frac{\sin(x/2)}{2} \tag{1g}$$

andrzej.odrzywolek@uj.edu.pl

2.2 Rozwiązywanie równania z parametrem

Wprowadzenie Gdyby jedyną możliwością, jaką daje Mathematica (CAS), była możliwość wpisania treści pojedynczego zadania i jego rozwiązanie, to szkoda byłoby tracić czasu na jej opanowanie. Prościej użyć AI. Ale równocześnie mamy do dyspozycji język i środowisko programistyczne, które pozwala zautomatyzować powyższy proces, a wyniki otrzymywać tysiącami w ciągu minut. Zadanie polega na napisaniu programu/apletu, który automatycznie będzie rozwiązywał równanie dla dowolnych wartości parametrów.

Zadanie

Rozwiąż w zależności od parametru p dla $x > 0$ równanie

$$e^{p/x} = \Gamma(x). \tag{2}$$

Ustal liczbę rozwiązań w zależności od parametru p, a następnie napisz funkcję $\mathrm{r}(p)$ rozwiązującą powyższe równanie i narysuj jej wykres.

2.3 Eliminacja kwantyfikatorów

Wprowadzenie Metodą całkowicie obcą w nauczaniu, a współcześnie w 100% zautomatyzowaną i zalgorytmizowaną, jest *eliminacja kwantyfikatorów Tarskiego*, zoptymalizowana w 1975 r. poprzez użycie rozkładu cylindrycznego. W skrócie, każde „szkolne” zadanie matematyczne (składające się z wielomianów, równań, nierówności, warunków logicznych, ...) może być rozwiązane automatycznie, pod warunkiem, że każdy literowy symbol w nim użyty jest interpretowany jako liczba rzeczywista. Aby jednak wykorzystać powyższe możliwości, radykalnie odmienne podejście do rozwiązywania zadań jest potrzebne. Zamiast samemu usiłować rozwiązać problem, cały wysiłek wkładamy w przepisanie treści w ścisłym języku logiki matematycznej: równań, nierówności, operatorów logicznych oraz kwantyfikatorów $\exists, \forall$. Po przepisaniu w ww. sposób, uruchamiamy **Resolve**/**Reduce**.

Zadania

2.3.1 Obliczenie granicy ciągu z definicji $\varepsilon - \delta$

Oblicz granicę ciągu liczb naturalnych n

$$g = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n-1)(n+2)}{n^2+1},$$

andrzej.odrzywolek@uj.edu.pl

korzystając **wyłącznie** z definicji

$$\forall_{\varepsilon,\varepsilon>0}\exists_{m,m>0}\forall_{n,n>m}\left(n>m\Rightarrow\left|\frac{(n+2)(2n-1)}{n^2-1}-g\right|<\varepsilon\right).$$

2.3.2 Rozszerzenie typowego zadania maturalnego z równaniem kwadratowym na r. dowolnego stopnia

Dla jakiej wartości parametru m równanie

$$(m-1)x^n-2mx-m=0 \tag{3}$$

posiada dwa różne pierwiastki rzeczywiste różne od zera. Rozważyć przypadki $n=2$, $n=3$, $n=4$, $n=5$, $n=6$.

WSKAZÓWKA: *zacznij od znanego Ci przypadku równania kwadratowego ($n=2$), poprzez rozwiązywalne równania 3 i 4 stopnia. Następnie przejdź do „nierozwiązywalnego” problemu równań stopnia 5 i wyższych.*

2.3.3 Pierwiastki wielomianu stopnia 6

Dla jakiej wartości parametru m równanie

$$(2-m)x^6+(3-m)x^5+1=0$$

posiada dwa różne ujemne pierwiastki rzeczywiste.

2.3.4 Precyzyjne formułowanie treści zadania

Dla jakich wartości parametru λ równanie

$$\lambda x^{25}-(\lambda+2)x^2+\lambda+2=0,$$

posiada:

a) 2 różne pierwiastki rzeczywiste, b) **dokładnie** 2 różne pierwiastki rzeczywiste.

2.3.5 Wyznaczenie minimum bez różniczkowania

Znajdź minimum funkcji rzeczywistej
a)

$$x^2+px+q$$

b)

$$|x|^{2/3}$$

metodą eliminacji kwantyfikatorów.

---

andrzej.odrzywolek@uj.edu.pl

2.4 Składanie funkcji

Wprowadzenie Celem ćwiczenia jest opanowanie składania funkcji, np: $f(f(f(f(f(x)))))$ w programie *Mathematica*.

Zadanie

Jaki jest efekt złożenia funkcji cos:

a) dwukrotnie,

b) 10-krotnie,

c) 100-krotnie,

d) nieskończenie wiele razy?

2.5 Składanie funkcji symbolicznie vs numerycznie

Wprowadzenie Celem ćwiczenia jest uczulenie i unaocznienie różnic pomiędzy obliczeniami **symbolicznymi** (zawierającymi liczby wymierne, całkowite, zdefiniowane stałe matematyczne $\pi, \infty, \ldots$) a **numerycznymi** (zawierającymi liczby zmiennoprzecinkowe typu 1.5). Po szkole średniej na ogół nie rozróżniamy $\frac{1}{10}$ od 0.1, pracując z komputerem różnica może okazać się katastrofalna w skutkach.

Zadanie

Napisać funkcję f która wykonuje działanie:

$$f(x) = 10\,x - \frac{9}{10},$$

oraz funkcję g wykonującą działanie:

$$g(x) = 10.0\,x - 0.9$$

Złożyć funkcje f i g same ze sobą wielokrotnie dla argumentu $x = 1/10$ oraz $x = 0.1$, np:

$$g(g(g(g(g(g(g(0.1))))))).$$

Przetestować funkcje dla dużej (>100) ilości złożeń. Wyciągnąć wnioski.