

Zadanie 1

$$\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+5\sqrt{1+6\sqrt{1+7\sqrt{1+8\sqrt{1+9\sqrt{1+10\sqrt{1+11\sqrt{1+\dots}}}}}}}}}}}} = 3.$$

Zadanie 2

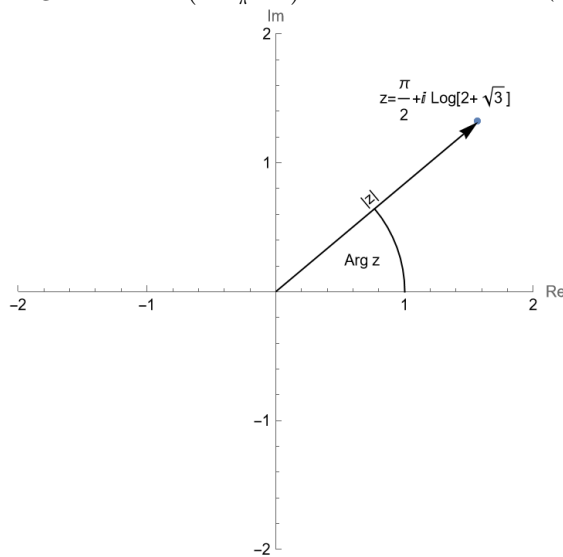
$$\lambda < 0 \vee \lambda > \frac{7}{23} \left(4 + 6\sqrt[3]{2} + 9 \times 2^{2/3} \right) \simeq 7.86621523346$$

Zadanie 3

$$z = \cos^{-1} \left(e^{\operatorname{artgh} 2} \right) = \frac{\pi}{2} + i \ln(2 + \sqrt{3}) = \frac{1}{2} \sqrt{\pi^2 + 4 \operatorname{arcosh}^2 2} \times e^{i \arctan \left(\frac{2 \operatorname{arcosh} 2}{\pi} \right)}$$

czyli:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} z &= \frac{\pi}{2} = 1.57079632679 \quad (\text{część rzeczywista}), \\ \operatorname{Im} z &= \ln(2 + \sqrt{3}) = 1.31695789692 \quad (\text{część urojona}), \\ |z| &= \frac{1}{2} \sqrt{\pi^2 + 4 \operatorname{arcosh}^2 2} = 2.0498241882 \quad (\text{moduł}), \\ \operatorname{Arg} z &= \arctan \left(\frac{2 \operatorname{arcosh} 2}{\pi} \right) = 0.697721842493 \quad (\text{faza}). \end{aligned}$$



Zadanie 4

Wyrażenie jest definicją granicy ciągu w ∞ , a wynik to

$$g = 1.$$

Zadanie 5

- Pole: $S = \frac{8\pi^3}{3} \simeq 82.6834044808 \text{ m}^2$
- Masa: $m = \sigma S = \frac{64\pi^3}{3} \simeq 661.467235846 \text{ kg}$
- Obwód: $L = 2\pi\sqrt{1 + 4\pi^2} + \sinh^{-1}(2\pi) \simeq 42.5125510942 \text{ m}$
- Maksymalne wartości: $-\pi^2 < x < \pi^2$, $-\pi < y < \pi$
- Położenie środka ciężkości: $x = 0, y = 0$, czyli odległość od osi obrotu $d = \pi$
- Moment bezwładności I (obrotowy): $I_I = \frac{128}{105}\pi^5 (21 + 4\pi^2) \simeq 22561.6290031 \text{ kg m}^2$
- Moment bezwładności II (wachlujący): $I_{II} = \frac{128\pi^5}{5} \simeq 7834.1039305 \text{ kg m}^2$
- Okres I: $T_I = 2\pi\sqrt{\frac{I_I}{mgd}} = 6.61112931783 \text{ s}$
- Okres II: $T_{II} = 2\pi\sqrt{\frac{I_{II}}{mgd}} = 3.89569627368 \text{ s}$

Zadanie 6

True.

Zadanie 7

Dla dowolnego n wynikiem złożenia jest funkcja wymierna (homograficzna) o wzorze

$$\frac{F_n + x F_{n+1}}{F_{n-1} + x F_n},$$

gdzie F_n oznacza n -ty wyraz ciągu Fibonacciego. Powyższy wzór jest słuszny także dla $n = \cosh(3 \operatorname{arcosh} 8) = 2024$. *Mathematica* ma problemy z zapisaniem powyższego wzoru w postaci numerycznej, z uporem maniaka odmawiając skrócenia licznika i mianownika, gdzie $F_{2024} \simeq 4.38 \times 10^{422}$. Trzeba to zrobić ręcznie zapisując wzór w postaci równoważnej np:

$$\frac{\frac{F_{n+1}}{F_n}x + 1}{x + \frac{F_{n-1}}{F_n}} \simeq \frac{1.618034x + 1}{x + 0.618034} \simeq 1.618034.$$

Powyższa funkcja jest niemal stała dla większości x . Takie zachowanie może wydawać się tajemnicze, ale wystarczy np. obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x F_{n+1} + F_n}{x F_n + F_{n-1}} = \frac{1}{2} (1 + \sqrt{5}) \equiv \varphi,$$

gdzie pojawia się $\varphi \simeq 1.618033988749895$, czyli złoty podział. Złożenie funkcji dla $n \gg 2024$ można więc w przybliżeniu zapisać jako

$$\varphi \frac{x + \frac{1}{\varphi}}{x + \varphi - 1}.$$

Złoty podział ma własność $1/\varphi = \varphi - 1$, co oznacza, że licznik i mianownik skracają się prawie wszędzie. Wyjątkiem będzie $x \simeq -1/\varphi$, ale aby to zauważyć, konieczna jest precyzja numeryczna powyżej 100 miejsc znaczących.

Zadanie 8

- Czas lotu $t_0 = \sqrt{\frac{8R_\oplus}{g}} \operatorname{artgh} \frac{v_0 \sin \alpha}{\sqrt{2gR_\oplus}}$
- Zasięg $x_{\max} = v_0 t_0 \cos \alpha$
- Maks. wysokość: $h_{\max} = 2R_\oplus \left(1 - \sqrt{1 - \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2gR_\oplus}} \right)$

Powyższe wyniki przechodzą w „szkolne” wzory na rzut ukośny dla $R_\oplus \rightarrow \infty$, i dają wyraźnie odróżnialne od nich trajektorie dopiero dla prędkości zbliżających się do I prędkości kosmicznej $v_I = \sqrt{gR_\oplus}$.

Zadanie 9

$X = \{80879040, -967856580, 4215182400, -9041089200, 10333889280, -6053041050, 1432054800\}$.

Ponieważ

$$\operatorname{Det}(e^A) = e^{\operatorname{Tr}A} = e^{534113/696150} \simeq 2.15381003376,$$

odpowiedź na drugą część wynosi 1.

Zadanie 10

Zbadaj przebieg funkcji wygenerowanej poleceniami programu *Mathematica*:

```
Import["https://raw.githubusercontent.com/VA00/SymbolicRegressionPackage/master/SymbolicRegression.m"]
ZadanieNOF2024[]
TODO
```