

# 1.1 Obliczanie postawowych wyrażeń matematycznych.

**Wprowadzenie** Celem ćwiczenia jest opanowanie umiejętności przepisywania wyrażeń z postaci tradycyjnej do kodu w *Mathematice*. Wyrażenia zapisane ręcznie lub w  $\text{\LaTeX}$ -u są na ogół niejasne i umożliwiają wieloraką, wynikającą z kontekstu dyscypliny w której zostały użyte i lokalnych tradycji, interpretację. Czasem jest na odwrót, wyrażenie jasne na kartce, trudno zapisać w *Mathematice*, np: wieże potęgowe czy ułamki łańcuchowe. *Mathematica* stała się obecnie *lingua franca* pozwalającym na ścisłe i jednoznacznie zapisywanie wyrażeń matematycznych. Co więcej, natychmiast możemy tymi wyrażeniami operować, np: upraszczając je czy obliczając wartości numeryczne.

**Zadanie** Uprość i oblicz numeryczną wartość poniższych wyrażeń, a następnie posortuj od najmniejszego do największego i zapisz wyniki ręcznie na kartce papieru lub za pomocą  $\text{\LaTeX}$ .

$$\frac{(10)!}{6938710!!} \quad (1a)$$

$$\binom{10}{3} \quad (1h)$$

$$|\log_2 1/3| + \text{sgn}(\pi^e - e^\pi) + \sqrt{2^\pi} + \exp(1/e) \quad (1b)$$

$$\prod_{k=1}^{\infty} \text{tg}^2 k \quad (1i)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^5} \quad (1c)$$

$$\frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{\dots+1}+1} + 1} \quad (1j)$$

$$1 + e^{\frac{1}{2+e^e - 1 - \frac{1}{1+\frac{1}{e}}}} \quad (1d)$$

$$\frac{1}{1 + \frac{e^{-2\pi}}{1 + \frac{e^{-4\pi}}{1 + \frac{e^{-6\pi}}{1 + \frac{e^{-8\pi}}{\dots}}}}} \quad (1k)$$

$$\text{tg}^{-1} \left( \text{tg} \frac{\pi}{18} \text{ctg} \frac{\pi}{9} \text{ctg} \frac{2\pi}{9} \right) \quad (1e)$$

$$\prod_{k=1}^{\infty} \sin k\pi \quad (1f)$$

$$\sqrt[3]{\pi^e e^\pi} \quad (1g)$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\left(\frac{1}{4}\right)^{\left(\frac{1}{6}\right)^{\left(\frac{1}{8}\right)^{\left(\frac{1}{10}\right)^{\left(\frac{1}{12}\right)^{\dots\frac{1}{\infty}}}}}} \quad (1l)$$

**Wskazówka** Nie każde zadanie da się rozwiązać po prostu wpisując i uruchamiając pojedyncze wbudowane polecenie. Wykorzystaj możliwości symboliczne, numeryczne i graficzne. Bądź przygotowany do porażki software, ale nie poddawaj się zbyt wcześnie, wykorzystaj wszystkie

dostępne opcje, czasem także rachunki ręczne/na kartce. *Mathematica* ma nam pomóc, a nie zastąpić myślenie.

## 1.2 Wykresy funkcji 1 zmiennej

**Wprowadzenie** Celem ćwiczenia jest opanowanie rysowania wykresów funkcji (rzeczywistych!) jednej zmiennej. Wykresy należy odpowiednio przeskalować, opisać a także umieć porównywać poprzez rysowanie wielu krzywych na raz lub/i nakładanie wykresów na siebie. Jest to konieczne, gdyż program *Mathematica* często daje wyniki w postaci wielu różnych wzorów, które po dokładniejszej analizie okazują się równoważne, co najlepiej widać na wykresie: krzywe nakładają się.

**Zadanie** Narysuj wykresy funkcji zadanych poniższymi wzorami. Które z powyższych funkcji mają identyczne wykresy? Jeżeli funkcje wyglądają identycznie, spróbuj przekształcić ich wzory lub wykazać w dowolny inny sposób, że są równoważne.

$$y = -x \quad (2a)$$

$$y = \log_2 x \quad (2e)$$

$$y = 1 - 2x^2 \quad (2b)$$

$$y = \frac{1+x}{1-x} \quad (2f)$$

$$y = \cos(2 \arcsin x) \quad (2j)$$

$$y = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} \quad (2c)$$

$$y = 1 + \frac{1}{(1/x+1)^{-1} - 1} \quad (2g)$$

$$y = \exp(e^{\ln x + \ln \ln x}) \quad (2k)$$

$$y = e^{2 \operatorname{artgh} x} \quad (2h)$$

$$y = -\operatorname{Li}_{-1}(x) \quad (2d)$$

$$y = \frac{1}{1+e^{-x}} \quad (2i)$$

$$y = \frac{1}{2} + \frac{\tanh x/2}{2} \quad (2l)$$

## 1.3 Rysowanie wielu nieznanych funkcji

**Wprowadzenie** W fizyce bardzo często napotykamy na liczne funkcje specjalne. Ich użycie w *Mathematicie* nie jest trudniejsze niż dla funkcji elementarnych ( $\sin$ ,  $\text{tg}$ ,  $\exp$ ,  $\ln$ ,  $\sqrt{\phantom{x}}$ ,  $\dots$ ). Celem ćwiczenia jest oswojenie się z funkcjami specjalnymi, które będą pojawiały się jako wyniki wielu zadań.

**Zadanie** Narysować na jednym wykresie i odpowiednio opisać kilka (naście) pierwszych (dla  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ ) funkcji specjalnych.

- a. wielomianów Legendere’a  $P_n(x)$ ,
- b. wielomianów Czybyszewa  $T_n(x)$ ,
- c. funkcji  $Y$  Bessela  $Y_n(x)$ ,
- d. polilogarytmów  $\text{Li}_n(x)$ .

**Wskazówka** Odpowiednie definicje można wyszukać w dokumentacji programu *Mathematica* a także na stronach internetowych, np. NIST Digital Library of Mathematical Functions <https://dlmf.nist.gov> lub Wikipedii.

## 1.4 Definiowanie i podstawianie prostych funkcji

**Wprowadzenie** Przyzwyczajani przez lata edukacji szkolnej do rozwiązywania zadań na tablicy, często mamy problem z odróżnieniem abstrakcyjnej funkcji, np: podnoszącej liczbę do kwadratu, oraz jej wzoru, np.  $x^2$ . Tablica wybacza takie przeskoki myślowe, *Mathematica* prawie nigdy. W miejsce funkcji należy podstawić funkcję, w miejsce wyrażenia matematycznego inne wyrażenie. Celem ćwiczenia jest uczulenie na powyższy fakt i pokazanie jak poprawnie dokonywać podstawień.

**Zadanie** Podstaw funkcję obliczającą  $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\ln$ ,  $\sqrt{\quad}$ , odwrotność  $1/x$ , następnik  $x + 1$ , kwadrat  $x^2$  oraz podwojenie argumentu  $2x$  w miejsce  $f$  do wyrażeń:  $f(x)$ ,  $f^2(x)$ ,  $f(x)^2$ ,  $f(x^2)$ ,  $f(2x)/2$ ,  $f^{-1}(x)$ ,  $f(x)^{-1}$ ,  $f(x^{-1})$ ,  $f'(x)$ ,  $f''(x)$ ,  $f''(x) + f(x)$ ,  $\int f(x)dx$ ,

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{1}{x} \frac{d}{dx} (xf(x)) \right).$$

**Wskazówka** Zdefiniuj funkcje wykonujące operację odwrotności **Inv**, podnoszenia do kwadratu **Sqr**, sukcesora **Suc** oraz podwojenia **Dbl**. Alternatywnie, użyj tzw. „czystej funkcji” (rachunek  $\lambda$ ).

## 1.5 Zadanie domowe

**Wprowadzenie** Celem zadania jest upewnienie się, że każdy student pobrał i zainstalował program *Mathematica* na swoim komputerze oraz potrafi go uruchomić i obsługiwać. Drugim celem jest zgromadzenie danych na temat wydajności różnych konfiguracji sprzętowych (CPU, RAM) oraz systemów operacyjnych (Windows, Linux, MacOS) w programie *Mathematica*. Dlatego przesłanie tylko wyniku benchmarku BEZ szczegółowych informacji o komputerze na którym został wykonany jest całkowicie **BEZUŻYTECZNE i BEZCELOWE!**

Wykonać benchmark wydajności komputera w programie Mathematica 13.1.0. Przesłać **wynik wraz z informacją o konfiguracji sprzętu** (procesor, pamięć, system operacyjny itd. zgodnie z tabelą) na mój adres e-mail.

Benchmark należy wykonać w domu na własnym sprzęcie/laptopie, korzystając z licencji home-use WFAIS, zob: <https://fais.uj.edu.pl/dla-studentow/studia-z-mathematica>.