

Zadanie 1

Podaj rzeczywiste rozwiązanie równania

$$2 \cosh^2 \left(\frac{x}{2} \right) - \sinh x = 10^{100}.$$

ODP:

$$x = -\ln(10^{100} - 1) = -\ln \underbrace{999 \dots 999}_{100 \times} \simeq -230.258509299.$$

Zadanie 2

Dla jakich wartości rzeczywistego parametru λ równanie

$$\lambda x^5 - (\lambda + 2)x^2 + \lambda + 2 = 0,$$

ma 2 różne pierwiastki rzeczywiste.

ODP:

$$\frac{12(18 - 25\sqrt{15})}{3017} \leq \lambda \leq \frac{12(18 + 25\sqrt{15})}{3017},$$

w przybliżeniu

$$-0.313522 \leq \lambda \leq 0.45671.$$

Zadanie 3

Oblicz całkę

$$\int_0^{2\pi} \frac{\ln(1 + e \cos x)}{\cos x} dx$$

dla dowolnie wybranej wartości $0 < e < 1$.

ODP:

$$2\pi \arcsin e.$$

Zadanie 4

Rozwiąż rzeczywisty układ równań:

$$\begin{cases} \sin^2 x + \cos^2 y = 1, \\ |x| + |y| = 2. \end{cases}$$

ODP: cztery rozwiązania

$$x = \pm 1, y = \pm 1.$$

Zadanie 5

Nierówność

$$x^4 + x^2 y(2y + 3) < (1 - y)y^3$$

wyznacza na płaszczyźnie x, y pewnego kształtu obszar (figurę płaską). Naszkicuj/opisz jej kształt, oblicz geometryczne pole, położenie środka ciężkości, momenty bezwładności względem osi x, y oraz obrotu dookoła osi prostopadłej przechodzącej przez środek ciężkości, a także obwód figury.

ODP:

1. pole $P = \pi/4$,
2. śr. ciężkości $x_{\text{CM}} = y_{\text{CM}} = 0$,
3. momenty bezwładności $I_x = I_y = 3/16$, $I_z = 3/8$,
4. obwód $L = 2E(-8) \simeq 6.68244661028$.

Zadanie 6

Dla 3-wymiarowych wektorów $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ oblicz

$$(\mathbf{b} - 2\mathbf{a}) \cdot \mathbf{c} + 2\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) - \mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{c}) + (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}).$$

ODP:

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}.$$

Zadanie 7

Podaj wynik 1000-krotnego złożenia funkcji

$$F(x) = \frac{x-2}{x-1}.$$

ODP:

$$F^{1000}(x) = x.$$

Zadanie 8

Ciało o masie m zostało wyrzucone pod kątem α do poziomu z prędkością v_0 i uderzyło w ziemię. Oblicz czas lotu, maksymalną wysokość i zasięg rzutu. Przyjąć uproszczone równanie ruchu:

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = m \mathbf{g} - \kappa \mathbf{v},$$

gdzie \mathbf{g} to wektor przyspieszenia grawitacyjnego, a współczynnik κ opisuje opór aerodynamiczny. Wartości $m > 0, v_0 > 0, 0 < \alpha < \pi/2, \kappa > 0$ proszę wybrać indywidualnie.

ODP:

- czas lotu

$$\tau = \frac{v_0 \sin \alpha}{g} + \frac{m \left(W \left(-\frac{e^{-\frac{\kappa v_0 \sin \alpha}{mg}} - 1}{mg} (mg + \kappa v_0 \sin \alpha) \right) + 1 \right)}{\kappa},$$

- zasięg rzutu

$$x_{\max} = \frac{m v_0 \cos(\alpha) \left(\frac{m g W \left(-\frac{e^{-\frac{\kappa v_0 \sin \alpha}{mg}} - 1}{mg} (mg + \kappa v_0 \sin \alpha) \right)}{mg + \kappa v_0 \sin \alpha} + 1 \right)}{\kappa},$$

- maksymalna wysokość

$$z_{\max} = \frac{m v_0 \sin \alpha}{\kappa} - \frac{m g^2 \ln \left(\frac{\kappa v_0 \sin \alpha}{mg} + 1 \right)}{\kappa^2}.$$

Zadanie 9

Oblicz macierz daną wyrażeniem

$$\sum_{n=0}^{2^{10}} \mathcal{A}^n, \quad \text{gdzie} \quad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & -9 & 6 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

ODP:

$$\mathcal{I}_4 + \mathcal{A} + \mathcal{A} \cdot \mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & -9 & 6 & \lambda - 57 \\ 0 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zadanie 10

Zbadaj przebieg funkcji wygenerowanej poleceniami programu *Mathematica*:

```
Import["https://raw.githubusercontent.com/VA00/SymbolicRegressionPackage/master/SymbolicRegression.m"]
```

ZadanieNOF[]

Bardzo dobra odpowiedź końcowa dla przykładowej funkcji

$$f(x) = 2 \exp(2e^{-x} + e^2).$$

