

## 8.1 R.r. zwyczajne

Znajdź rozwiązanie ogólne równań różniczkowych zwyczajnych:

$$y'(x) = x^n \quad (1a) \quad y'(x) = \sinh x + xy(x) \quad (1e) \quad \frac{d^4 y}{dx^4} = 0 \quad (1j)$$

$$y'(x) = y + e^x \quad (1b) \quad y''(x) = y \quad (1f) \quad \frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{dy}{dx} + x^5 \quad (1k)$$

$$y'(x) = y \sin x \quad (1c) \quad y'' = 1/y \quad (1g) \quad \frac{d}{dx} \left( x \frac{dy}{dx} + y \right) = y \quad (1l)$$

$$y'' = 1/\sqrt{y} \quad (1h)$$

$$y'(x) = 1/y(x) \quad (1d) \quad y'' = y^2 \quad (1i) \quad y''' = y + y' + y'' \quad (1m)$$

Narysuj rodzinę rozwiązań otrzymaną dla różnych wartości stałych całkowania. Sprawdź wynik podstawiając go do równania i upraszczając.

## 8.2 Krzywe całkowe

Znajdź i narysuj rozwiązanie równania różniczkowego przechodzące przez punkt  $\{1, 1\}$  dla:

$$y' = \cos x + y \quad (2a) \quad y' = 6y^2 \quad (2e)$$

$$y' = 1/y \quad (2b) \quad y' = \sin y \quad (2f)$$

$$y'' = x^2 \quad (2c) \quad y' = \ln y \quad (2g)$$

$$y' = -\sqrt{-y} \quad (2d) \quad y' = \ln(1 + y) \quad (2h)$$

## 8.3 Zagadnienie początkowe dla oscylatora harmonicznego

Znajdź i narysuj rozwiązanie zagadnienia początkowego dla równania:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, x(0) = 0, \dot{x}(0) = v_0 \quad (3a)$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \sin \omega t, x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0 \quad (3b)$$

## 8.4 Układy r.r. zwyczajnych

Rozwiąż układ równań różniczkowych zwyczajnych:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases} \quad (4a)$$

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases} \quad (4b)$$

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{x} \\ x' = \frac{1}{y} \end{cases} \quad (4c)$$

$$\begin{cases} y' = -x + \cos x \\ x' = y - \sin y \end{cases} \quad (4d)$$

## 8.5 Oscylator harmoniczny

Sprawdź rozwiązanie ogólne równania oscylatora harmonicznego

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (5)$$

postawiając podane niżej **funkcje** do równania (5)

$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi), x(t) = (a + bi) e^{i\omega t}, x(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t.$$

## 8.6 Zagadnienie początkowe z dowolną funkcją

Znajdź rozwiązanie równania:

$$\ddot{x} + x = f(t)$$

z warunkami początkowymi:  $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0$ . Sprawdzić, czy otrzymany wzór działa dla

$$f(t) = 0 \quad (6a)$$

$$f(t) = \sin \pi t \quad (6d)$$

$$f(t) = \delta(t - t_0) \quad (6f)$$

$$f(t) = 1 \quad (6b)$$

$$f(t) = \sin 2t \quad (6c)$$

$$f(t) = e^{-(t-t_0)^2} \quad (6e)$$

## 8.7 Rzut ukośny w jednorodnym polu grawitacyjnym

Kula wolframowa o masie  $m = 100$  kg została wystrzelona pod kątem  $\alpha = 4/3$  rad z prędkością 1600 m/s. Obliczyć czas lotu, zasięg rzutu oraz maksymalną wysokość w następujących przypadkach:

1. rzutu w jednorodnym polu grawitacyjnym bez oporu powietrza
2. przy założeniu, że opór aerodynamiczny zależy liniowo od prędkości ze współczynnikiem danym wzorem Stokesa; lepkość powietrza pobrać za pomocą `ChemicalData["DryAir", "Viscosity"]` Równanie ruchu z oporem powietrza ma postać

$$m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = m \vec{g} - k \frac{d\vec{x}}{dt}$$

gdzie  $m$ -masa,  $k$ -wsp. oporu pow.,  $\vec{g} = \{0, -g\}$  - przysp. ziemskie.

3. przy założeniu, że moduł siły oporu powietrza ma postać:

$$F = \frac{1}{2} \rho C_d A v^2,$$

gdzie  $\rho$  - gęstość powietrza,  $A$  - powierzchnia czołowa. Współczynnik oporu  $C_d$  przyjąć dla liczby Reynoldsa odpowiadającej prędkości początkowej i lepkości suchego powietrza. Wartości można wziąć np: z WolframAlpha.

4. rozszerzyć powyższy model o zależność gęstości powietrza od wysokości zgodnie ze wzorem barometrycznym.
5. dodać obrót kuli na którą działa siła nośna prostopadła do kierunku lotu o wartości proporcjonalnej do iloczynu prędkości liniowej i kątowej.

Porównać tory lotu i zależność prędkości od czasu dla wszystkich kombinacji powyższych przypadków.

## 8.8 Rzut balonem

Arystoteles twierdził, że ciało wyrzucone pod kątem porusza się po linii prostej aż do momentu utraty „pędu”, po czym spada pionowo w dół. Pokazać, rozwiązując równania ruchu w jednorodnym polu grawitacyjnym z dużym oporem powietrza, że są sytuacje dla których tor rzeczywiście wygląda bardzo podobnie do opisanego przez Arystotelesa.