

6.1 Proste wyrażenia zespolone

Oblicz wyrażenia zespolone, podając w wyniku, o ile to możliwe, część rzeczywistą i urojoną, a także moduł i fazę (postać wykładnicza/trigonometryczna):

$$i^2 \quad (1a) \qquad i^i \quad (1f) \qquad e^{i\pi/4} \quad (1k)$$

$$\sqrt{-1} \quad (1b) \qquad (-1)^{-i} \quad (1g) \qquad \arcsin 2 \quad (1l)$$

$$\frac{1}{i} \quad (1c) \qquad \frac{\sqrt{2} + i}{\sqrt{2} - i} \quad (1h) \qquad \Re \left(\sqrt{\sqrt{2} + \sqrt{2}i} \right)^2 \quad (1m)$$

$$-i \ln(-1) \quad (1d) \qquad (1 - i)^{-e} \quad (1i)$$

$$(1 + i)^{3/2} \quad (1e) \qquad e^i \quad (1j) \qquad i^{i^{i^{\dots i^i}}} \quad (1n)$$

6.2 Zespolone pierwiastkowanie

Oblicz, i przedstaw graficznie na płaszczyźnie zespolonej **wszystkie** pierwiastki 18-tego stopnia:

$$\sqrt[18]{1 - i}.$$

6.3 Postać wykładnicza i trygonometryczna

Oblicz:

$$\sin i\alpha, \quad \cos i\alpha, \quad \tan i\alpha, \quad \sinh i\alpha, \quad \cosh i\alpha$$

a następnie skonwertuj do postaci zawierającej wyłącznie eksponenty (tj. wyrażenia postaci e^z).

6.4 Obwód RLC

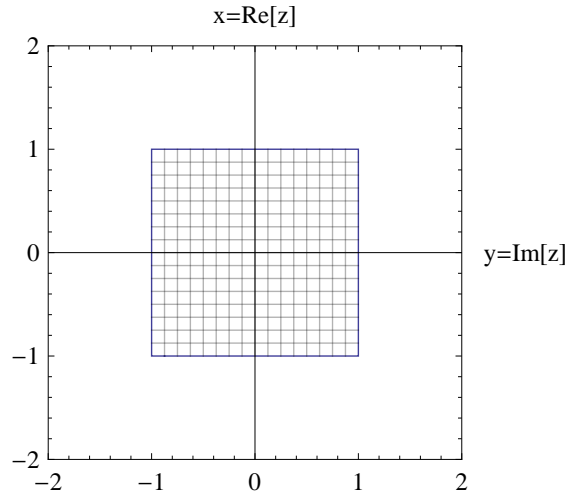
Oblicz część rzeczywistą, urojoną, moduł oraz fazę wyrażenia:

$$\frac{\left(\frac{1}{R} + i\omega C\right)^{-1}}{\left(\frac{1}{R} + i\omega C\right)^{-1} + i\omega L + \frac{1}{i\omega C} + \left(\frac{1}{i\omega L} + i\omega C\right)^{-1}}$$

gdzie R, L, C jest rzeczywiste i większe od zera. Narysuj wykres zależności modułu i fazy od ω dla wybranych wartości R, L, C .

6.5 Przekształcenie konforemne

Na płaszczyźnie zespolonej $(x, y) \equiv (Re(z), Im(z))$ dany jest kwadrat o boku 1:



Jak zmieni się obraz kwadratu, jeżeli każdy punkt płaszczyzny zespolonej zostanie przekształcony za pomocą funkcji zespolonej $F(z)$, gdzie:

$$F(z) = z + z_0, \quad z_0 = const \quad (5a) \qquad F(z) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \quad (5d)$$

$$F(z) = z_0 z, \quad z_0 = const \quad (5b) \qquad F(z) = \operatorname{tg} z \quad (5e)$$

$$F(z) = z^2/2 \quad (5c) \qquad F(z) = \pm\sqrt{z} \quad (5f)$$

Powyżej, z_0 jest stałą zespoloną, np: $z_0 = 2 + 3i$. Spróbuj wykonać analogiczne przekształcenia koła o promieniu 1.

6.6 Funkcje harmoniczne

Proszę sprawdzić rozwiązanie równania Laplace'a na płaszczyźnie

$$\Delta f(x, y) = 0,$$

w postaci części rzeczywistej wyrażenia zespolonego

$$f(x, y) = \Re \left[\frac{1}{1 + z^2} + \sin(\pi + z^2) \right], \quad z = x + iy.$$

6.7 Potęgowanie w dziedzinie zespolonej

Znajdź wszystkie zespolone rozwiązania równania $z^\pi = 1 - i$.