

4.1 Nierówności

Rozwiąż graficznie i symbolicznie nierówności:

$$x^6 - 3x^5 + 3x^4 - x^3 \leq 0 \quad (1a) \qquad \cos(2x) < \sin^2 x \quad (1d)$$

$$\sin x < 0 \quad (1b) \qquad |2|x| - x| - |x - |x|| < 1 \quad (1e)$$

$$|1/x| \geq 1 \quad (1c) \qquad x^x < \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}} \quad (1f)$$

4.2 Rozkład cylindryczny w 2D

Znajdź granice całkowania (równoważnie: rozwiąż jawnie nierówność) we współrzędnych kartezjańskich (x, y) (*rozkład cylindryczny*) dla obszaru płaskiego zdefiniowanego jako:

$$\text{koło o promieniu 1 i środku w punkcie (0,0)} \quad (2a)$$

$$\text{koło o promieniu R i środku w punkcie (R,0)} \quad (2b)$$

$$\text{trójkąt prostokątny o bokach długości 3,4,5, prostopadłe boki na osiach} \quad (2c)$$

$$\max(|x|, |y|) \leq 1 \quad (2d)$$

$$|x| + |y| < 1 \quad (2e)$$

$$\text{kwadrat o boku 3 wewnątrz którego wycięto koło o promieniu 1} \quad (2f)$$

Dla każdego przypadku oblicz pole figury na dwa sposoby: używając wbudowanych poleceń programu *Mathematica* oraz zapisując całki w granicach wynikających z rozwiązania nierówności.

4.3 Rozkład cylindryczny w 3D

Znajdź granice całkowania we współrzędnych kartezjańskich (x, y, z) (*rozkład cylindryczny*) dla obszaru trójwymiarowego zdefiniowanego jako:

$$\text{kula o promieniu 1 i środku w punkcie } (0,0), \quad (3a)$$

$$\text{stożek o promieniu podstawy } R \text{ oraz wysokości } H, \quad (3b)$$

$$\text{czworościan foremny}, \quad (3c)$$

$$\text{połowa kuli o promieniu } R, \quad (3d)$$

$$|x + y| < 1 \wedge |x + z| < 1 \wedge |y + z| < 1. \quad (3e)$$

4.4 Własności figury płaskiej

Dana jest figura płaska zdefiniowana wnętrzem zamkniętej części wykresu funkcji uwikłanej

$$x^3 + 2xy + y^4 = 0. \quad (4)$$

Znajdź

- najmniejsze i największe wartości x i y w obszarze,
- pole figury,
- położenie jej środka ciężkości,
- momenty bezwładności względem osi Ox , Oy oraz osi prostopadłej do płaszczyzny xy i przechodzącej przez punkt $(0, 0)$,
- * obwód figury,
- * położenie punktu wewnętrznego najbardziej oddalonego od brzegu.

4.5 Własności figury płaskiej we współrzędnych biegunowych

Jak wyżej, ale krzywa jest zadana wzorem we współrzędnych biegunowych r, α :

$$r = \sqrt{\sin \alpha}, \quad 0 \leq \alpha \leq \pi. \quad (5)$$