

3.1 Różniczkowanie

Oblicz pochodne:

$$\frac{d}{dx} e^{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}} \quad (1a)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \sqrt{1+x^2} \quad (1b)$$

$$\frac{d^n}{dx^n} \exp(ax) \quad (1c)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \cos(\omega t + \phi) \quad (1d)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \frac{xy}{x+y} \quad (1e)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2} (x'(t)^2 + y'(t)^2) - \frac{1}{2} (x(t)^2 + y(t)^2) \right] \quad (1f)$$

$$\partial_t \int_0^{\sin t} x^x dx \quad (1g)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{f(t)}^{g(t)} h(x) dx \quad (1h)$$

3.2 Obliczanie całki nieoznaczonej

Wyznacz funkcjepierwotne:

$$\int e^{-x} \cos 2x dx, \quad (2a)$$

$$\int x^{\sqrt{x}} dx, \quad (2c)$$

$$\int \frac{dx}{x^4 + 1}, \quad (2b)$$

$$\int \sqrt{x^4 + 1} dx. \quad (2d)$$

Wynik sprawdź przez różniczkowanie, graficznie oraz numerycznie. Która z całek została obliczona błędnie przez program *Mathematica*?

3.3 Rozwijanie funkcji w szereg potęgowy

Rozwiń w szereg potęgowy dookoła $x = 0$ funkcje:

$$\sqrt{1+x} \quad (3a)$$

$$\cos x \quad (3c)$$

$$\ln(1+x) \quad (3e)$$

$$\sin x \quad (3b)$$

$$\operatorname{tg} x \quad (3d)$$

$$\frac{1}{1+x} \quad (3f)$$

Porównaj wykresy rozwinięcia w szereg z oryginalnymi funkcjami.

3.4 Zastosowanie szeregów w fizyce

Znajdź przybliżenie relatywistycznego wzoru na energię kinetyczną dla małych prędkości $v \ll c$ z dokładnością do wyrazów rzędu v^4 :

$$E_k = mc^2 / \sqrt{1 - v^2/c^2} - mc^2. \quad (4)$$

Do jakiej prędkości wzór przybliżony daje dokładność 1%?

3.5 Całkowanie arbitralnych funkcji

Pochodną po t jakiego wyrażenia jest wzór:

$$\frac{2tF'}{f} - t^2 \frac{F'f'}{f^2} + \frac{t^2 F''}{f}, \quad (5)$$

gdzie $F(t), f(t)$ są dowolnymi funkcjami?

3.6 Transformacje i symetrie wykresów

Dla zadanej osobno dla każdej osoby funkcji $f(x)$ zmiennej rzeczywistej x narysuj:

$$f(-x) \quad (6a) \quad f(x \pm 1) \quad (6d) \quad |f(x)| \quad (6g) \quad \frac{1}{f(x)} \quad (6j)$$

$$-f(x) \quad (6b) \quad f(2x) \quad (6e) \quad f(x) \pm 1 \quad (6h) \quad f^{-1}(x) \quad (6k)$$

$$-f(-x) \quad (6c) \quad f(x/2) \quad (6f) \quad f(1/x) \quad (6i) \quad 2f(x) \quad (6l)$$

Opisz słownie graficzne transformacje, którym poddany zostało wykres funkcji.

3.7 Badanie przebiegu funkcji

Zbadaj przebieg zmienności wybranej z listy funkcji, czyli: znajdź dziedzinę, miejsca zerowe i przecięcia z osiami, ekstrema, asymptoty i punkty przegięcia. Narysuj wykres z zaznaczonymi i opisanymi charakterystycznymi punktami wykresu.