

Zadanie 1

Podaj rzeczywiste rozwiązanie równania

$$\frac{1}{1 + e^{-x}} = 10^{-64}.$$

ODP:

$$x = -\ln(10^{64} - 1) = -\ln \underbrace{999 \dots 999}_{64 \times} \simeq -147.365.$$

Zadanie 2

Znajdź punkt o najmniejszej wartości y spełniający nierówność:

$$x^2 - y^3 \leq xy + 1.$$

Podaj współrzędne tego punktu.

ODP:

Współrzędne $\{x_0, y_0\}$ szukanego punktu można zapisać jako

$$x_0 = \zeta, \quad y_0 = 2\zeta,$$

gdzie $\zeta \simeq -0.545$ jest ujemnym, rzeczywistym pierwiastkiem (**Root**) równania trzeciego stopnia

$$8\zeta^3 + \zeta^2 + 1 = 0.$$

Pierwiastek ζ można zapisać jawnie (**ToRadicals**, Cubics \rightarrow True) jako

$$\zeta = -\frac{1}{24} \left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{a}} + \sqrt[3]{a} \right), \quad \text{gdzie } a = 865 - 24\sqrt{1299}.$$

Zadanie 3

Oblicz:

$$\int \cos^n x \, dx,$$

dla $n = 4$.

ODP:

$$\frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x.$$

Zadanie 4

Rozwiąż rzeczywisty układ równań:

$$\begin{cases} \sin^2 x + \cos^2 y = 1, \\ x^4 + y^4 = y. \end{cases}$$

ODP:

$$x = 0, y = 0; \quad x = \pm \frac{1}{\sqrt[3]{2}}, y = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$$

Zadanie 5

Układ nierówności

$$\begin{cases} \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} > 1 \\ \max(|x|, |y|) < 8 \end{cases}$$

wyznacza na płaszczyźnie pewnego kształtu obszar. Oblicz jego geometryczne pole.

ODP:

$$24\sqrt{7} \simeq 63.498.$$

Zadanie 6

Dla 3-wymiarowych wektorów $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ oblicz

$$(\mathbf{b} - 2\mathbf{a}) \cdot \mathbf{c} + 2\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) - \mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{c}) + (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}).$$

ODP:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}.$$

Zadanie 7

Podaj wszystkie możliwe różne wyniki złożenia funkcji

$$F(x) = 2 - 2/x.$$

ODP:

$$x, 2 - 2/x, \frac{x-2}{x-1}, \frac{2}{2-x}.$$

Zadanie 8

Obracające się ze stałą prędkością kątową o wartości Ω ciało o masie m zostało wyrzucone pod kątem α do pionu z prędkością v_0 . Oblicz maksymalną wysokość i zasięg rzutu. Przyjąć uproszczone równanie ruchu:

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = m \mathbf{g} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v},$$

gdzie \mathbf{g} to wektor przyspieszenia grawitacyjnego, a wyraz $\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}$ opisuje siły aerodynamiczne. Wartości $m > 0, v_0 > 0, 0 < \alpha < \pi, \boldsymbol{\Omega} \neq 0$ proszę wybrać indywidualnie.

Zadanie 9

Oblicz macierz daną wyrażeniem

$$\mathcal{A}^7 + e^{\mathcal{A}} + \mathcal{J} - e \mathcal{A}$$

gdzie

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 - \pi & 1 - \pi \\ \pi & \pi \end{pmatrix}, \quad \mathcal{J} = e \begin{pmatrix} 0 & i\pi \\ i\pi & 0 \end{pmatrix}.$$

ODP: macierz zerowa

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zadanie 10

Zbadaj przebieg funkcji wygenerowanej poleceniami programu *Mathematica*:

```
Import["https://raw.githubusercontent.com/VA00/SymbolicRegressionPackage/master/SymbolicRegression.m"]  
ZadanieNOF[]
```