Zadanie 1.

Oblicz wyrażenia zespolone, podając w wyniku, o ile to możliwe, część rzeczywistą i urojoną, a także moduł i fazę (postać wykładnicza/trygonometryczna):

$$i^2 \tag{1a}$$

$$\sqrt{-1} \tag{1b}$$

$$\frac{1}{i} \tag{1c}$$

$$-i\ln(-1) \tag{1d}$$

$$(1+i)^{3/2} \tag{1e}$$

$$i^i \tag{1f}$$

$$(-1)^{-i} \tag{1g}$$

$$\frac{\sqrt{2}+i}{\sqrt{2}-i} \tag{1h}$$

$$(1-i)^{-e} \tag{1i}$$

$$e^i \tag{1j}$$

$$e^{i\pi/4} \tag{1k}$$

$$\operatorname{arcsin} 2 \tag{1l}$$

$$\Re\left(\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i}\right)^2 \tag{1m}$$

$$i^{i^{i^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{i^{i}}}}}}} \tag{1n}$$

Zadanie 2.

Oblicz, i przedstaw graficznie na płaszczyźnie zespolonej **wszystkie** pierwiastki 18-tego stopnia:

$$\sqrt[18]{1-i}$$

Zadanie 3.

Oblicz:

$$\sin i\alpha, \quad \cos i\alpha, \quad \tan i\alpha, \quad \sinh i\alpha, \quad \cosh i\alpha$$

a nastepnie skonwertuj do postaci zawierającej wyłącznie eksponenty (tj. wyrażenia postaci e^z).

Zadanie 4.

Oblicz część rzeczywistą, urojoną, moduł oraz fazę wyrażenia:

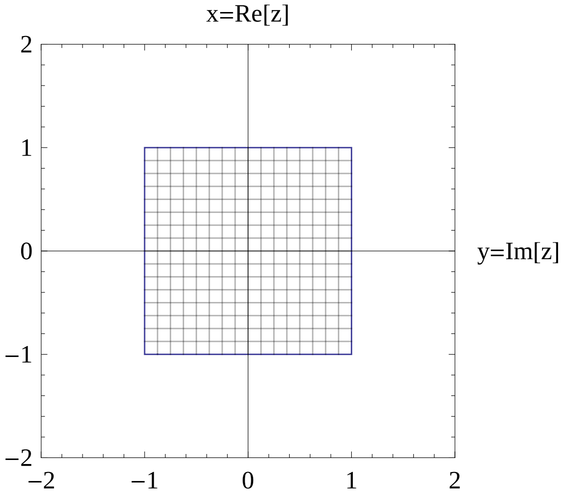
$$\frac{\left(\frac{1}{R}+i\omega C\right)^{-1}}{\left(\frac{1}{R}+i\omega C\right)^{-1}+i\omega L+\frac{1}{i\omega C}+\left(\frac{1}{i\omega L}+i\omega C\right)^{-1}}$$

gdzie R, L, C jest rzeczywiste i większe od zera. Narysuj wykres zależności modułu i fazy od ω dla wybranych wartości R, L, C.

andrzej.odrzywolek@uj.edu.pl

Zadanie 5.

Na płaszczyźnie zespolonej $(x, y) \equiv (Re(z), Im(z))$ dany jest kwadrat o boku 1:



Jak zmieni się obraz kwadratu, jeżeli każdy punkt płaszczyzny zespolonej zostanie przekształcony za pomocą funkcji zespolonej $F(z)$, gdzie:

$$F(z) = z + z_0, \quad z_0 = const \tag{5a}$$

$$F(z) = z_0\, z, \quad z_0 = const \tag{5b}$$

$$F(z) = z^2/2 \tag{5c}$$

$$F(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \tag{5d}$$

$$F(z) = \operatorname{tg} z \tag{5e}$$

$$F(z) = \pm\sqrt{z} \tag{5f}$$

Powyżej, z_0 jest stałą zespoloną, np: $z_0 = 2 + 3i$. Spróbuj wykonać analogiczne przekształcenia koła o promieniu 1.

Zadanie 6.

Proszę sprawdzić rozwiązanie równania Laplace'a na płaszczyźnie

$$\Delta f(x, y) = 0,$$

w postaci części rzeczywistej wyrażenia zespolonego

$$f(x, y) = \Re\left[\frac{1}{1+z^2} + \sin\left(\pi + z^2\right)\right], \quad z = x + iy.$$

Zadanie 7.

Znajdź wszystkie zespolone rozwiązania równania $z^\pi = 1 - i$.

andrzej.odrzywolek@uj.edu.pl