

Zadanie 1.

Rozwiąż równania ze względu na **rzeczywistą** niewiadomą x :

$$\sqrt{1 + \sqrt{x}} = 2 - \sqrt{x} \quad (1a) \qquad x^7 + x + 1 = 0 \quad (1c)$$

$$x = 2e^{-x} \quad (1b) \qquad x e^x + 1 = 2x \quad (1d)$$

UWAGA: prawidłowa kolejność rozwiązywania równań to: (1) metoda graficzna **Plot**, (2) metoda numeryczna **FindRoot, NSolve** metody symboliczne **Solve, Reduce, FindInstance**

Zadanie 2.

Oblicz pochodne:

$$\frac{d}{dx} e^{\sqrt{1+tg^2 x}} \quad (2a) \qquad \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2} (x'(t)^2 + y'(t)^2) - \frac{1}{2} (x(t)^2 + y(t)^2) \right] \quad (2f)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \sqrt{1+x^2} \quad (2b)$$

$$\frac{d^n}{dx^n} \exp(ax) \quad (2c) \qquad \partial_t \int_0^{\sin t} x^x dx \quad (2g)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \cos(\omega t + \phi) \quad (2d)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \frac{xy}{x+y} \quad (2e) \qquad \frac{d}{dt} \int_{f(t)}^{g(t)} h(x) dx \quad (2h)$$

Zadanie 3.

Oblicz całki nieoznaczone:

$$\int e^{-x} \cos 2x dx \quad (3a) \qquad \int x^{\sqrt{x}} dx \quad (3c)$$

$$\int \frac{dx}{x^4 + 1} \quad (3b) \qquad \int \sqrt{x^4 + 1} dx \quad (3d)$$

Wynik sprawdź przez różniczkowanie, graficznie oraz numerycznie. Która z całek została obliczona błędnie przez program *Mathematica*?

Zadanie 4.

Rozwiń w szereg potęgowy dookoła $x = 0$ funkcje:

$$\sqrt{1+x} \quad (4a) \qquad \cos x \quad (4c) \qquad \ln(1+x) \quad (4e)$$

$$\sin x \quad (4b) \qquad \operatorname{tg} x \quad (4d) \qquad \frac{1}{1+x} \quad (4f)$$

Porównaj wykresy rozwinięcia w szereg z oryginalnymi funkcjami.

Zadanie 5.

Znajdź przybliżenie relatywistycznego wzoru na energię kinetyczną dla małych prędkości $v \ll c$ z dokładnością do wyrazów rzędu v^4 :

$$E_k = mc^2 / \sqrt{1 - v^2/c^2} - mc^2. \quad (5)$$

Do jakiej prędkości wzór przybliżony daje dokładność 1%?

Zadanie 6.

Zbadaj przebieg zmienności podanej funkcji $f(x)$ (każdy dostanie na e-mail osobną funkcję), czyli: znajdź dziedzinę, miejsca zerowe i przecięcia z osiami, ekstrema, asymptoty i punkty przegięcia. Narysuj wykres z zaznaczonymi i opisanymi charakterystycznymi punktami wykresu.

Zadanie 7.

Dla zadanej w Zad. 6 funkcji $f(x)$ zmiennej rzeczywistej x narysuj:

$$f(-x) \quad (6a) \qquad f(x \pm 1) \quad (6d) \qquad |f(x)| \quad (6g) \qquad \frac{1}{f(x)} \quad (6j)$$

$$-f(x) \quad (6b) \qquad f(2x) \quad (6e) \qquad f(x) \pm 1 \quad (6h) \qquad f^{-1}(x) \quad (6k)$$

$$-f(-x) \quad (6c) \qquad f(x/2) \quad (6f) \qquad f(1/x) \quad (6i) \qquad 2f(x) \quad (6l)$$

Opisz słownie graficzne transformacje, którym poddany zostało wykres funkcji.

Zadanie 8.

Pochodną po t jakiego wyrażenia jest wzór:

$$\frac{2tF'}{f} - t^2 \frac{F'f'}{f^2} + \frac{t^2 F''}{f},$$

gdzie $F(t), f(t)$ są dowolnymi funkcjami?