2-wymiarowe równanie Burgersa

A. Odrzywołek

Aktualizacja: 3 stycznia 2021

2-wymiarowe równanie Burgersa, modelujące przepływ płynu z prędkością $\mathbf{u}$ i lepkością ϵ:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u}\nabla\mathbf{u} = \epsilon\,\Delta\mathbf{u} \tag{1}$$

gdzie $\mathbf{u} = (u_x(x,y,t), u_y(x,y,t))$ – pole wektora prędkości, za pomocą transformacji Cole-Hopf'a:

$$\mathbf{u} = -2\epsilon\,\nabla\ln\chi(x,y,t)$$

sprowadza się do liniowego równania rozchodzenia się ciepła. Rozwiązanie takiego równania można zapisać jako pewną całkę korzystając np: z metody funkcji Greena. Celem zadania jest przedstawienie zbioru nietrywialnych (nie dających się sprowadzić do 1 wymiaru) rozwiązań równania (1) dla $\epsilon \to 0$ i wybranych nieciągłych warunków początkowych. W szczególności należy zbadać jak zachowują się rozwiąania dla których w chwili $t = 0$ pole prędkości rotuje np:

$$\mathbf{u}\Big|_{t=0} = \begin{cases} (-\Omega\,y, \Omega\,x,) & \text{dla} \quad x^2+y^2 > R^2 \\ 0 \quad \text{dla} \quad x^2+y^2 < R^2 \end{cases}$$

oraz posiadających w chwili $t = 0$ symetrię „wielokątną”:

$$\mathbf{u}\Big(r,\phi,t=0\Big) = \mathbf{u}\Big(r,\phi+\frac{2\pi}{n}\Big)$$

we współrzędnych biegunowych, gdzie $n = 3,4,5,6\ldots$. Rozwiązania mają naśladować sześciokąt na biegunie Saturna [4].

Literatura

[1] http://en.wikipedia.org/wiki/Burgers_equation

[2] AMRCLAW

[3] P. Aaron Lott, 2D Spectral Element Scheme for Viscous Burgers' Equation

[4] Sześciokąt na biegunie Saturna