Zestaw zadań 6

Zadanie 1.
Rozważamy Lagrangian:

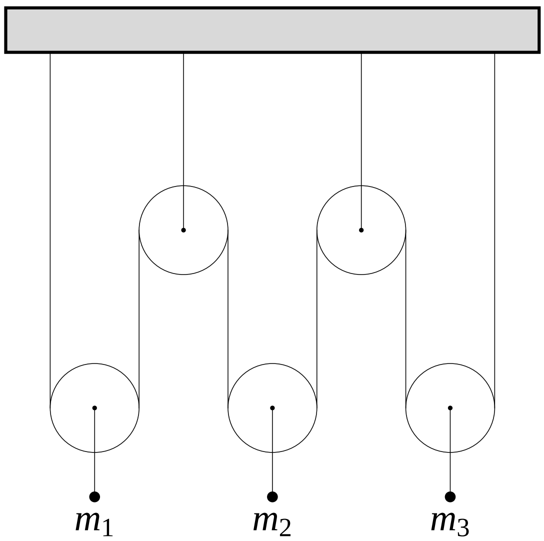
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mu\left(\dot{q_1}^2 + \dot{q_2}^2 + \dot{q_3}^2\right) - \frac{1}{2}k\left({q_1}^2 + {q_2}^2 + {q_3}^2\right). \tag{1}$$

Pokazać, że ruch odbywa się w płaszczyźnie i wyznaczyć jej równanie:

a) korzystając z rozwiązania równań ruchu

b) korzystając z twierdzenia Noether i niezmienniczości $\mathcal{L}$ względem dowolnych obrotów

Zadanie 2.
Dla układu z Rys. 1 znajdującego się w jednorodnym polu grawitacyjnym o natężeniu g skierowanym w dół wyznaczyć zachowane wielkości. Masy bloczków i linek oraz tarcie pominąć.
Wskazówka: Aby wyznaczyć zachowany pęd należy skorzystać z twierdzenia Noether.



Rysunek 1: Ilustracja do Zadania 2.

Zadanie 3.

Znaleźć całkę ruchu wynikającą z niezmienniczości całki działania względem obrotów hiperbolicznych na płaszczyźnie (x, t) dla Lagrangianu:

$$\mathcal{L} = -m\sqrt{1 + \dot{x}^2}. \tag{3}$$

Niezmienniczość należy wcześniej wykazać bezpośrednim rachunkiem.

Wskazówka: Zob. Kotkin, Zad. 4.6, 4.10 i 4.12e.

Zadanie 4.

Korzystając z wyniku Zad. 1 można wprowadzić współrzędne biegunowe na płaszczyźnie do której jest ograniczony ruch wynikający z Lagrangianu (1) redukując ilość stopni swobody do 2. Podać Lagrangian i wyznaczyć okres drgań w kierunku radialnym. Wyznaczyć ruch w zależności od zachowanych energii i momentu pędu.