Zestaw zadań 2

Zadanie 2. (rozwiązanie)
Oblicz:

$$\exp\left(\mathbf{A}\,t\right)\cdot\begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix} \tag{1}$$

1 Obliczenie wartości własnych i wektorów własnych

Obliczamy wartości własne i wektory własne macierzy $\mathbf{M}$:

$$\mathbf{M}=\mathbf{A}t=\begin{bmatrix} 0 & t \\ -\omega^2 t & 0 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Wartości własne są rozwiązaniami λ *równania charakterystycznego*:

$$Det\left(\mathbf{M}-\lambda\,\mathbf{I}\right)=0 \tag{3}$$

gdzie *macierz jednostkowa*:

$$\mathbf{I}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Obliczamy wyznacznik (lewa strona równania (3)):

$$Det\left(\begin{bmatrix} -\lambda & t \\ -\omega^2 t & -\lambda \end{bmatrix}\right)=(-\lambda)^2-t\,(-\omega^2 t)=\lambda^2+\omega^2t^2.$$

Rozwiązania r. charakterystycznego:

$$\lambda^2+\omega^2t^2=0$$

to

$$\lambda=\pm i\omega t, \qquad \text{czyli:}\quad \lambda_1=i\omega t, \quad \lambda_2=-i\omega t.$$

Dla każdej z wartości własnych wyznaczamy *wektory własne* $\mathbf{v}$ spełniające równanie:

$$\mathbf{M}\cdot\mathbf{v}=\lambda\,\mathbf{v}, \quad \text{gdzie:}\quad \mathbf{v}=\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Dla pierwszej wartości własnej $\lambda_1 = i\omega t$ otrzymujemy *równanie własne*:

$$\begin{bmatrix} 0 & t \\ -\omega^2 t & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = i\omega t \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}.$$

Po wymnożeniu macierzy przez wektor otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} B\,t = i\omega t\,A \\ -\omega^2 t\,A = i\omega t\,B. \end{cases} \tag{5}$$

Drugie równanie jest równoważne pierwszemu, co widać po podzieleniu obu stron przez $i\omega t$ (czas t upraszcza się w obydwóch). Przypominam, że:

$$\frac{1}{i} = -i, \qquad i^2 = -1.$$

Istnieje nieskończenie wiele rozwiązań układu równań (5) postaci:

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ i\omega A \end{bmatrix} \equiv A \begin{bmatrix} 1 \\ i\omega \end{bmatrix}.$$

W dalszych obliczeniach wybór stałej A (różnej od zera!) nie jest kluczowy, ale może uprościć/utrudnić obliczenia. Przyjmuję $A = 1$, co daje ostateczną postać pierwszego (do wartości własnej $\lambda_1 = i\omega t$)wektora własnego:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ i\omega \end{bmatrix}.$$

Powtarzjąc analogicznie obliczenia dla $\lambda_2 = -i\omega t$ otrzymujemy:

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -i\omega \end{bmatrix}.$$

2 Obliczenie macierzy transformacji oraz do niej odwrotnej

Na tym etapie posiadamy już wszystkie informacje potrzebne do rozwiązania układu r.r.zwyczajnych I rzędu. Ponieważ celem zadania jest jawne obliczenie eksponenty macierzy $\exp \mathbf{M}$, tworzymy dodatkowo *macierz transformacji*, która składa się z umieszczonych obok siebie w kolumanch wektorów własnych:

$$\mathbf{U} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2] \equiv \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i\omega & -i\omega \end{bmatrix},$$

oraz *macierz zdiagonalizowaną* posiadającą na przekatnej wartości własne:

$$\mathbf{D} = \mathbf{I} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i\omega t & 0 \\ 0 & -i\omega t \end{bmatrix}.$$

Macierze $\mathbf{M}, \mathbf{U}, \mathbf{D}$ są związane następująco:

$$\mathbf{D} = \mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{U}, \tag{6}$$

lub równoważnie (bez użycia macierzy odwrotnej $\mathbf{U}^{-1}$):

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{D} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{U}. \tag{7}$$

Sprawdzenie bezpośrednim rachunkiem, czy zachodzi (7) to prosty test poprawności wykonanych wcześniej obliczeń.

Aby obliczyć (1) potrzebujemy macierzy odwrotnej. Jest to wykonalne w pamięci, ale najprostszy i pewny sposób korzysta z definicji oraz współczynników nieoznaczonych. Zakładamy, że:

$$\mathbf{U}^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

i wykonujemy mnożenie (lub w odwrotnej kolejności $\mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{U}$):

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{U}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i\omega & -i\omega \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c & b+d \\ i\omega(a-c) & i\omega(b-d) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Równość macierzy oznacza równość jej wszystkich elementów. Przyrównując je do siebie odpowiednio i opuszczając w trzecim $i\omega$ otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} a+c=1 \\ b+d=0 \\ a-c=0 \\ i\omega(b-d)=1 \end{cases}$$

którego rozwiązanie to:

$$a = \frac{1}{2},\; b = -\frac{i}{2\omega},\; c = \frac{1}{2},\; d = \frac{i}{2\omega}.$$

Ostatecznie:

$$\mathbf{U}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{i}{2\omega} \\ \frac{1}{2} & \frac{i}{2\omega} \end{bmatrix} \equiv \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{i}{\omega} \\ 1 & \frac{i}{\omega} \end{bmatrix}.$$

3 Obliczenie eksponenty macierzy

Równanie (6) można odwrócić:

$$\mathbf{M} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{D}\mathbf{U}^{-1}. \tag{8}$$

Obliczenie $\exp \mathbf{D}$ jest szczególnie łatwe:

$$e^{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{i\omega t} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega t} \end{bmatrix}$$

Przy obliczaniu $\exp \mathbf{M}$ korzystamy z tożsamości:

$$e^{\mathbf{M}} = \mathbf{U} \cdot e^{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{U}^{-1}. \tag{9}$$

Dowód:

$$e^{\mathbf{M}} = e^{\mathbf{U}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{U}^{-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\mathbf{U} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{U}^{-1}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \mathbf{U}\cdot\mathbf{D}\mathbf{U}^{-1}\mathbf{U}\cdot\mathbf{D}\mathbf{U}^{-1} \ldots \text{n razy} \ldots \mathbf{U}\cdot\mathbf{D}\mathbf{U}^{-1}\mathbf{U}\cdot\mathbf{D}\mathbf{U}^{-1}.$$

Czynniki postaci $\mathbf{U}^{-1}\mathbf{U} = \mathbf{I}$ wewnątrz upraszczają się, i otrzymujemy:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \mathbf{U} \cdot \mathbf{D}^n \cdot \mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U} \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \mathbf{D}^n \right) \cdot \mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U} \cdot e^{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{U}^{-1}.$$

Koniec Dowodu.

Ostatecznie:

$$e^{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i\omega & -i\omega \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{i\omega t} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{i}{2\omega} \\ \frac{1}{2} & \frac{i}{2\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} e^{-it\omega} + \frac{1}{2} e^{it\omega} & \frac{ie^{-it\omega}}{2\omega} - \frac{ie^{it\omega}}{2\omega} \\ \frac{1}{2} i e^{it\omega}\omega - \frac{1}{2} i e^{-it\omega}\omega & \frac{1}{2} e^{-it\omega} + \frac{1}{2} e^{it\omega} \end{bmatrix}.$$

Korzystając ze wzorów:

$$\frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} = \cos(\omega t), \quad \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} = \sin(\omega t),$$

otrzymujemy:

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t)/\omega \\ -\omega \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{bmatrix}.$$

Odpowiedź końcowa:

$$\exp(\mathbf{A}\, t) \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ v_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t) \\ v_0 \cos(\omega t) - x_0\, \omega \sin(\omega t) \end{bmatrix}.$$

4 Uwagi

Wynik końcowy jest rozwiązaniem zagadnienia początkowego równania oscylatora harmonicznego:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0,$$

zapisanego (używając podstawienia $\dot{x} = v$) jako układ r.r.liniowych I rzędu:

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -\omega^2 x \end{cases} \tag{10}$$

lub równoważnie, w postaci macierzowej:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix}.$$

Ponieważ rozwiązaniem równania:

$$\dot{y} = A\,y,$$

z warunkiem początkowym $y(0) = y_0$ jest:

$$y(t) = y_0\, e^{At},$$

analogicznie możemy poprawnie napisać rozwiązanie dowolnego układu r. liniowych I rzędu:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie zagadnienia początkowego $\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0$ to:

$$\mathbf{X}(t) = e^{\mathbf{A}\,t} \cdot \mathbf{X}_0.$$

Dodatkowo, rozwiązanie zagadnienia własnego dla macierzy $\mathbf{A}$ dostarcza postaci transformacji, która sprowadza układ równań do najprostszej postaci. Wprowadzamy zamiast $x(t), v(t)$ w układzie (10) nowe ***funkcje*** $\zeta(t), \xi(t)$ zgodnie ze wzorem:

$$\begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} = \mathbf{U} \cdot \begin{bmatrix} \zeta \\ \xi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i\omega & -i\omega \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \zeta \\ \xi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \zeta + \xi \\ i\omega(\zeta - \xi) \end{bmatrix}. \tag{11}$$

Po wstawieniu do (10) nowych funkcji otrzymujemy:

$$\begin{cases} \dot{\zeta} + \dot{\xi} = i\omega(\zeta - \xi) \\ i\omega(\dot{\zeta} - \dot{\xi}) = -\omega^2(\zeta + \xi). \end{cases}$$

Dzieląc drugie z równań powyżej przez $i\omega$ i odejmując/dodając stronami otrzymujemy:

$$\begin{cases} \dot{\zeta} = i\,\omega \quad \zeta \\ \dot{\xi} = -i\,\omega \quad \xi. \end{cases} \tag{12}$$

Funkcje $\zeta(t), \xi(t)$ nazywamy *współrzędnymi normalnymi.* W układzie (12) powyżej, każde z równań rozwiązujemy osobno - układ *de facto* zostaje „rozbity” na pojedyncze równania z jedną funkcją niewiadomą. Współczynniki przy funkcjach są wartościami własnymi układu wyjściowego. Postać (12) i transformacja (11) często są „oczywiste”, co eliminuje potrzebę przeprowadzania całej zaprezentowanej procedury.