Zestaw zadań 12

Zadanie 1.

Wyznaczyć przekształcenie kanoniczne dane funkcją tworzącą:

$$\Phi(q_1, q_2, P_1, P_2) = \alpha(q_1 P_1 + q_2 P_2)$$

Zadanie 2.

Dany jest Hamiltonian:

$$H = \frac{1}{2}\frac{p_2 - p_1}{\sqrt{p_1 q_1 + p_2 q_2}}.$$

Znaleźć transformację kanoniczną $(p_1, p_2, q_1, q_2) \to (P_1, P_2, Q_1, Q_2)$ oraz nowy Hamiltonian, jeżeli funkcją tworzącą przekształcenia jest:

$$\Phi = 2(q_1 P_1 - q_2 P_2)^2.$$

Korzystając z prostoty nowego Hamiltonianu, rozwiązać równania kanoniczne w zmiennych (P_1, P_2, Q_1, Q_2), a następnie przetransformować je do zmiennych (p_1, p_2, q_1, q_2).

Zadanie 3.

Obliczyć:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\mathbb{H}^n (\mathbf{x}) \Big|_{t=0} \frac{t^n}{n!} \right)$$

gdzie:

$$\mathbb{H}(\mathbf{x}) = \{H, \mathbf{x}\}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}, \quad H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 q^2.$$

Wyrażenie $\mathbb{H}^n$ należy rozumieć jako składanie operatora $\mathbb{H}$, np: $\mathbb{H}^2(p) = \{H, \{H, p\}\}$. Nawiasy Poissona w konwencji Landaua&Lifszica, tj. „najpierw po p".

Zadanie 4.

Wyznaczyć funkcję tworzącą postaci $\Psi(p, Q)$, która prowadzi do tego samego przekształcenia kanonicznego $(p, q) \to (P, Q)$ co funkcja $F(q, P) = q^2 e^P$.

[Kotkin, Zad. 11.14]

andrzej.odrzywolek@uj.edu.pl

Zadanie 5.

Znaleźć funkcję tworzącą przekształcenia kanonicznego zamieniającego miejscami współrzędną i odpowiadający jej pęd.

Zadanie 6.

Znaleźć transformację kanoniczną $(p, q) \to (P, Q)$, w wyniku której Hamiltonian oscylatora harmonicznego nie będzie zależał od współrzędnej Q. Podać funkcję tworzącą tej transformacji.

Zadanie 7.

Rozwiązać brakujące Zad. 9, 10 lub 11 z Zestawu 11.