Zestaw zadań 11

Zadanie 1.

Wyznacz transformatę Legendere'a funkcji:

$$f(x) = \frac{1}{2}mx^2 \tag{1a}$$

$$f(x) = 2^x \tag{1b}$$

$$f(x) = -\sqrt{x-1} + x \arctan \sqrt{x-1} \tag{1c}$$

$$f(x) = \sqrt{x^2+m^2} \tag{1d}$$

Wskazówka: Zob. W. Arnold, „Metody matematyczne fizyki klasycznej", §14. Przekształcenie Legendre'a, lub: wikipedia.org/Legendre_transformation

Zadanie 2.

Podać mnemotechniczną regułę ustalenia znaku w równaniach kanonicznych Hamiltona, korzystając z równań ruchu jednowymiarowego w potencjale $U(x)$.

Zadanie 3.

Wyprowadzić Hamiltonian i podać równania kanoniczne dla ruchu w polu centralnym.

Zadanie 4.

Obliczyć nawiasy Poissona dla punktu materialnego o masie m we współrzędnych kartezjańskich:

$$\{M_i, x_j\}, \tag{4a}$$

$$\{Mi, p_j\}, \tag{4b}$$

$$\{M_i, M_j\}, \tag{4c}$$

gdzie: x_i - współrzędne kartezjańskie, $p_i = m\dot{x}_i$ - pędy, M_i - składowe kartezjańskie momentu pędu punktu materialnego..

[Kotkin, Zad. 11.1a]

Zadanie 5.

Wykazać, że:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}, \tag{5a}$$

$$\frac{df}{dt} = -\{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t}, \tag{5b}$$

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0. \tag{5c}$$

Zadanie 6.

Udowodnić, że jeżeli wielkości f i g są zachowane, czyli zachodzi:

$$\frac{df}{dt} = 0, \ \frac{dg}{dt} = 0 \tag{6a}$$

to ich nawias Poissona także jest wielkością zachowaną:

$$\frac{d\{f, g\}}{dt} = 0. \tag{6b}$$

Zadanie 7.

Które, z podanych transformacji to przekształcenia kanoniczne:

$$x = X,\ y = Y, \quad p_x = P_y,\ p_y = P_x \tag{7a}$$

$$x = P_x,\ y = P_y, \quad p_x = X,\ p_y = Y \tag{7b}$$

$$x = -P_x,\ y = -P_y, \quad p_x = X,\ p_y = Y \tag{7c}$$

$$x = P_y,\ y = -P_x, \quad p_x = Y,\ p_y = X \tag{7d}$$

$$x = \alpha X,\ y = \beta Y, \quad p_x = \gamma P_x,\ p_y = \delta P_y \tag{7e}$$

Zadanie 8.

Sprawdzić, czy podana transformacja $(x, y, p_x, p_y) \to (X, Y, P_x, P_y)$ jest kanoniczna:

$$x = X \cos\lambda + \frac{P_y}{m\omega} \sin\lambda, \tag{8a}$$

$$y = Y \cos\lambda + \frac{P_x}{m\omega} \sin\lambda, \tag{8b}$$

$$p_x = -m\omega Y \sin\lambda + P_x \cos\lambda, \tag{8c}$$

$$p_y = -m\omega X \sin\lambda + P_y \cos\lambda. \tag{8d}$$

Zadanie 9.

Wyznaczyć przekształcenie kanoniczne dane funkcją tworzącą:

$$F(q, Q, t) = \frac{1}{2} m\omega(t) q^2 \operatorname{ctg} Q. \tag{9}$$

Zapisać za pomocą nowych zmiennych P, Q Hamiltonian oraz równania kanoniczne dla oscylatora harmonicznego o zmiennej częstości $\omega(t)$:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega(t)^2 q^2.$$

[Kotkin, Zad. 11.13a]

Zadanie 10.

Znaleźć Hamiltonian układu, o którym wiadomo, że jego równania ruchu to:

$$\ddot{x} - 2\omega\dot{y} + kx = 0, \tag{10a}$$

$$\ddot{y} + 2\omega\dot{x} + ky = 0, \tag{10b}$$

gdzie ω, k to pewne stałe.

Zadanie 11.

Dla układu z Zad. 3, Zestaw 9:

a) podać Hamiltonian

b) wyprowadzić równania kanoniczne

c) naszkicować kształt studni potencjału na płaszczyźnie konfiguracyjnej (region Hill'a) dla różnych wartości energii oraz opisać jakościowo ruch dla $E < E_m$, $E_m < E < E_M$ i $E > E_M$, gdzie $E_{m,M}$ to minimalna energia niezbędna do wykonania pełnego obrotu przez masę $m(M)$.