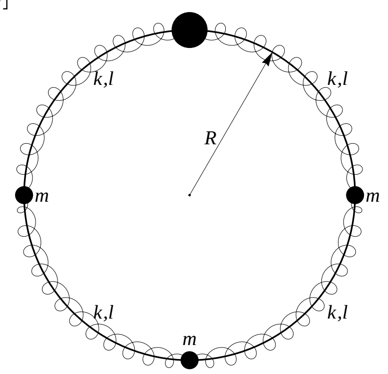
Zestaw zadań 10

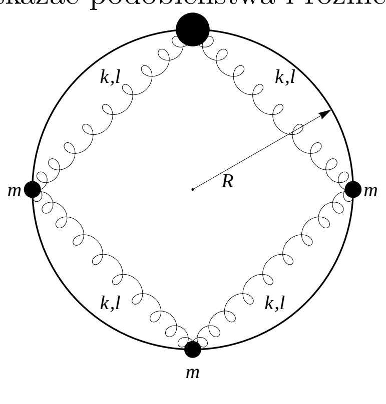
Zadanie 1.

Zbadać małe drgania układu pokazanego na rysunku poniżej. Punkt na górze jest zamocowany, a trzy identyczne masy m poruszają się po obręczy połaczone sprężynami o stałej k i długości spoczynkowej l. Wyliczone mody drgań posortować zgodnie z rosnącą częstością, i podać przyjmujac najniższą z nich jako jednostkę. Naszkicować sposób w jaki poruszają się masy w każdym z modów. [Kotkin, Zad. 6.2]



Zadanie 2.

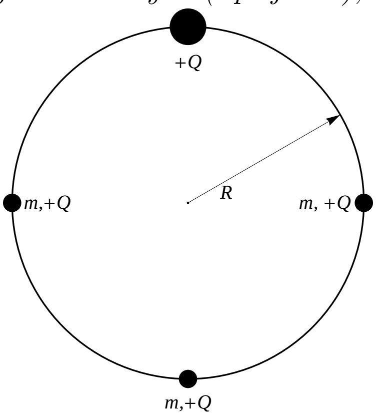
Zbadać małe drgania trzech identycznych kulek na obręczy w sytuacji podobnej do tej z Zad. 1, ale teraz sprężyny są naciągane wzdłuż prostej łączącej masy. Wskazać podobieństwa i różnice rozwiązania Zad. 1 i Zad. 2.



Zadanie 3.

Zbadać małe drgania układu trzech mas na obręczy, w sytuacji gdy są one obdarzone identyczymi ładunkami elektrycznymi Q o tym samym znaku. Górny nieruchomy punkt także posiada ładunek $+Q$.

UWAGA: *zadanie jest formalnie bardzo podobne do Zad. 1, ale nieco uciążliwe rachunkowo. Celem usprawnienia obliczeń można przyjąć pewne konkretne wartości wszystkich stałych (np. jeden), rozwiązać część „macierzową”, i przeskalować*



wyniki.

Zadanie 3: rozwiązanie

Zadanie należy rozpocząć od wybrania możliwie wygodnych współrzędnych uogólnionych. W tym wypadku „dobrą” współrzędną jest np. miara łukowa kąta który tworzą masy z dowolnie wybranym punktem na obręczy. Naturalnym wyborem punktu odniesienia jest „górna” masa nieporuszająca się. Inny, jeszcze lepszy wybór, to kąt liczony względem położenia równowagi. Takie współrzędne należy wybrać, jeżeli łatwo z góry ustalić jakie będą położenia równowagi, czyli ekstrema lokalne energii potencjalnej. W zadaniu, dosyć łatwe jest „odgadnięcie”, że minimum lokalnym jest stan symetryczny, w którym masy są rozłożone w wierzchołkach kwadratu wpisanego w okrąg. Zjawisko spontanicznego łamania symetrii, występujące nawet w prostych układach mechanicznych[1] nakazuje ostrożność w stosowaniu takiego rozumowania. Małe drgania można badać w otoczeniu **każdego** minimum lokalnego, i w ogólności będą one inne.

Przyjmuję więc, numerując masy zaczynając od nieruchomej (numer 0) w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara. Podobnie definiuję kąty ϕ_i odchylenia od położenia równowagi. Energia kinetyczna układu jest prosta do napisania, jako suma energii kinetycznych trzech identycznych mas poruszających się po okręgu ($T = \frac{1}{2}I\omega^2$):

$$T = \frac{1}{2}mR^2\left(\dot{\phi}_1^2 + \dot{\phi}_2^2 + \dot{\phi}_3^2\right). \tag{1}$$

[1]Zob. przykłady zadań w artykule prof. H. Arodzia w Fotonie: http://www.if.uj.edu.pl/Foton/85/pdf/spontaniczne.pdf

Aby obliczyć energię potencjalną musimy znać odległości $d_{i,j}$ pomiędzy wszystkimi sześcioma parami ładunków. Można to zrobić korzystając z twierdzenia sinusów:

$$d_{01} = 2R\sin\left(\phi_1/2 + \pi/4\right) \tag{2a}$$

$$d_{02} = 2R\sin\left(\phi_2/2 + \pi/2\right) \tag{2b}$$

$$d_{03} = 2R\sin\left(\phi_3/2 + 3\pi/4\right) \tag{2c}$$

$$d_{12} = 2R\sin\left(\frac{\phi_2 - \phi_1}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \tag{2d}$$

$$d_{23} = 2R\sin\left(\frac{\phi_3 - \phi_2}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \tag{2e}$$

$$d_{13} = 2R\sin\left(\frac{\phi_3 - \phi_1}{2} + \frac{\pi}{2}\right) \tag{2f}$$

lub twierdzenia kosinusów:

$$d_{01} = \sqrt{2}R\sqrt{1 - \cos\left(\phi_1 + \pi/2\right)} \tag{3a}$$

(3b)

(3c)

(3d)

(3e)

(3f)

Zachodzi równość:

$$\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} = |\sin\frac{\alpha}{2}|$$

przy czym analizując małe drgania można pominąć wartość bezwzględną, bo kąt α zawsze jest w przedziale $(0, \pi)$.

Postać zawierająca sinusy kątów połówkowych wydaje się znacznie prostsza do różniczkowania i ona zostanie użyta w dalszych rachunkach. Energia potencjalna całego układu to:

$$U = kQ^2 \left(\frac{1}{d_{01}} + \frac{1}{d_{02}} + \frac{1}{d_{03}} + \frac{1}{d_{12}} + \frac{1}{d_{23}} + \frac{1}{d_{13}} \right)$$

i podstawiając za d_{ij} dostajemy wyrażenie zawierające trzy współrzędne uogólnione ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3:

$$U = \frac{kQ^2}{2R} \left(\frac{1}{\sin\left(\frac{\phi_1}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} + \frac{1}{\sin\left(\phi_2/2 + \pi/2\right)} + \frac{1}{\sin\left(\frac{\phi_3}{2} + \frac{3\pi}{4}\right)} + \frac{1}{\sin\left(\frac{\phi_2-\phi_1}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} + \frac{1}{\sin\left(\frac{\phi_3-\phi_2}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} + \frac{1}{\sin\left(\frac{\phi_3-\phi_1}{2} + \frac{\pi}{2}\right)} \right) \tag{4}$$

Teraz przystępujemy do mozolnej rachunkowo, ale nie stanowiącej wielkiego wyzwania intelektualnego części: obliczenia drugich pochodnych[2] potencjału w minimum, czyli dla:

$$\phi_1 = 0, \quad \phi_2 = 0, \quad \phi_3 = 0. \tag{5}$$

Warunek konieczny na istnienie ekstremum to:

$$\frac{\partial U}{\partial \phi_1} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial \phi_2} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial \phi_3} = 0.$$

Jeżeli poprawnie odgadnęliśmy wcześniej minimum (stan symetryczny), to pochodne te będą równe zero dla (5).

Pierwsze pochodne są trywialne, i wszystkie mają postać:

$$\frac{\partial U}{\partial \phi_1} = -\frac{kQ^2}{4R} \sum_{k=1}^{3} \pm \frac{\cos \alpha_k}{\sin^2 \alpha_k}$$

[2] Studenci powinni zdawać sobie sprawę z faktu, iż tego typu obliczenia są współcześnie w pełni automatyzowalne. Wykonuje je np. *Mathematica*, na którą IFUJ posiada licencję studencką. Jednak problemy o trzech czy nawet czterech stopniach swobody wymagają naprawdę niewielkiego wysiłku, i są wykonalne dla sprawnej rachunkowo osoby w czasie rzędu 1 godziny. Tego typu zadania pojawiają się na kolokwiach i egzaminie. Praktyka pokazuje, że znikomy odsetek osób nie radzi sobie z obliczeniami „ręcznymi”, w sytuacji gdy bez problemu wykonuje je przy komputerze. Na ogół obie umiejętności idą w parze. W pewnych sytuacjach użycie komputera jest dosyć trudne pojęciowo, np. gdy musimy rozróżniać jawnie np. funkcję zawsze przyjmujacą wartość zero, liczbę zero czy macierz zerową. Na kartce, wszystkie te obiekty wygladają identycznie, a oczywiste (dla czlowieka, nie komputera!) przekształcenia wykonujemy naturalnie „w głowie”.

gdzie α_k to kąty zawierające ϕ_1 i wystepujące pod sinusem w (4). Podstawiając (5) dostajemy, zgodnie z przewidywaniem, zero. Analogicznie obliczamy pozostałe dwie pierwsze pochodne:

$$\frac{\partial U}{\partial \phi_1} = -\frac{kQ^2}{4R}\left[\frac{\cos\left(\frac{\phi_1}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin^2\left(\frac{\phi_1}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} - \frac{\cos\left(\frac{\phi_2-\phi_1}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin^2\left(\frac{\phi_2-\phi_1}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} - \frac{\cos\left(\frac{\phi_3-\phi_1}{2}+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\phi_3-\phi_1}{2}+\frac{\pi}{2}\right)}\right] \tag{6a}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \phi_2} = -\frac{kQ^2}{4R}\left[\frac{\cos\left(\frac{\phi_2}{2}+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\phi_2}{2}+\frac{\pi}{2}\right)} + \frac{\cos\left(\frac{\phi_2-\phi_1}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin^2\left(\frac{\phi_2-\phi_1}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} - \frac{\cos\left(\frac{\phi_3-\phi_2}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin^2\left(\frac{\phi_3-\phi_2}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\right] \tag{6b}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \phi_3} = -\frac{kQ^2}{4R}\left[\frac{\cos\left(\frac{\phi_3}{2}+\frac{3\pi}{4}\right)}{\sin^2\left(\frac{\phi_3}{2}+\frac{3\pi}{4}\right)} + \frac{\cos\left(\frac{\phi_3-\phi_2}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin^2\left(\frac{\phi_3-\phi_2}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} + \frac{\cos\left(\frac{\phi_3-\phi_1}{2}+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\phi_3-\phi_1}{2}+\frac{\pi}{2}\right)}\right] \tag{6c}$$

Aby obliczyć drugie pochodne zauważamy, że:

$$\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha}\right) = -\frac{1+\cos^2\alpha}{\sin^3\alpha} \equiv -f(\alpha). \tag{7}$$

Pochodna funkcji wewnętrznej to zawsze $\pm 1/2$, więc obliczenie drugich pochodnych cząstkowych sprowadza się do przepisania odpowiednich składników pierwszych pochodnych z odpowiednimi znakami. Drugie pochodne, zapisane za pomocą funkcji f są równe:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \phi_1^2} = \frac{kQ^2}{8R}\left[f\left(\frac{\phi_1}{2}+\frac{\pi}{4}\right) + f\left(\frac{\phi_2-\phi_1}{2}+\frac{\pi}{4}\right) + f\left(\frac{\phi_3-\phi_1}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\right] \tag{8a}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \phi_2^2} = \frac{kQ^2}{8R}\left[f\left(\frac{\phi_2}{2}+\frac{\pi}{2}\right) + f\left(\frac{\phi_2-\phi_1}{2}+\frac{\pi}{4}\right) + f\left(\frac{\phi_3-\phi_2}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right] \tag{8b}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \phi_3^2} = \frac{kQ^2}{8R}\left[f\left(\frac{\phi_3}{2}+\frac{3\pi}{4}\right) + f\left(\frac{\phi_3-\phi_2}{2}+\frac{\pi}{4}\right) + f\left(\frac{\phi_3-\phi_1}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\right] \tag{8c}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \phi_1 \partial \phi_2} = -\frac{kQ^2}{8R}\left[f\left(\frac{\phi_2-\phi_1}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right] \tag{8d}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \phi_2 \partial \phi_3} = -\frac{kQ^2}{8R}\left[f\left(\frac{\phi_3-\phi_2}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right] \tag{8e}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \phi_1 \partial \phi_3} = -\frac{kQ^2}{8R}\left[f\left(\frac{\phi_3-\phi_1}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\right] \tag{8f}$$

Pochodne mieszane są sobie oczywiście równe:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\phi_3\partial\phi_1} = \frac{\partial^2 U}{\partial\phi_1\partial\phi_3}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial\phi_3\partial\phi_2} = \frac{\partial^2 U}{\partial\phi_2\partial\phi_3}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial\phi_2\partial\phi_1} = \frac{\partial^2 U}{\partial\phi_1\partial\phi_2}.$$

Celem obliczania drugich pochodnych jest wyznaczenie elementów macierzy:

$$\mathcal{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial\phi_1^2} & \frac{\partial^2 U}{\partial\phi_1\partial\phi_2} & \frac{\partial^2 U}{\partial\phi_1\partial\phi_3} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial\phi_2\partial\phi_1} & \frac{\partial^2 U}{\partial\phi_2^2} & \frac{\partial^2 U}{\partial\phi_2\partial\phi_3} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial\phi_3\partial\phi_1} & \frac{\partial^2 U}{\partial\phi_3\partial\phi_2} & \frac{\partial^2 U}{\partial\phi_3^2} \end{bmatrix} \tag{9}$$

w minimum lokalnym (5). Wstawiając odpowiednie pochodne cząstkowe (8) dostajemy:

$$\mathcal{J} = \frac{kQ^2}{8R} \begin{bmatrix} 2f(\pi/4) + f(\pi/2) & -f(\pi/4) & -f(\pi/2) \\ -f(\pi/4) & f(\pi/2) + 2f(\pi/4) & -f(\pi/4) \\ -f(\pi/2) & -f(\pi/4) & f(3\pi/4) + f(\pi/4) + f(\pi/2) \end{bmatrix} \tag{10}$$

Z definicji funkcji f (7) mamy:

$$f(\pi/4) = 3\sqrt{2}, \quad f(\pi/2) = 1, \quad f(3\pi/4) = 3\sqrt{2}.$$

Ostatecznie, macierz formy kwadratowej energii potencjalnej w przybliżeniu małych drgań to:

$$\mathcal{J} = \frac{kQ^2}{8R} \begin{bmatrix} 6\sqrt{2}+1 & -3\sqrt{2} & -1 \\ -3\sqrt{2} & 6\sqrt{2}+1 & -3\sqrt{2} \\ -1 & -3\sqrt{2} & 6\sqrt{2}+1 \end{bmatrix}. \tag{11}$$

Macierz formy kwadratowej energii kinetycznej jest w tym przypadku bardzo prosta (proporcjonalna do jednostkowej) i jej otrzymanie nie wymaga żadnych[3] obliczeń:

$$\mathcal{K} = mR^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{12}$$

[3] Można podać na macierz $\mathcal{K}$ wzór analogiczny do (9):

$$\mathcal{K} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 T}{\partial\dot\phi_1^2} & \frac{\partial^2 T}{\partial\dot\phi_1\partial\dot\phi_2} & \frac{\partial^2 T}{\partial\dot\phi_1\partial\dot\phi_3} \\ \frac{\partial^2 T}{\partial\dot\phi_2\partial\dot\phi_1} & \frac{\partial^2 T}{\partial\dot\phi_2^2} & \frac{\partial^2 T}{\partial\dot\phi_2\partial\dot\phi_3} \\ \frac{\partial^2 T}{\partial\dot\phi_3\partial\dot\phi_1} & \frac{\partial^2 T}{\partial\dot\phi_3\partial\dot\phi_2} & \frac{\partial^2 T}{\partial\dot\phi_3^2} \end{bmatrix}.$$

Powyższy wzór ma praktyczne znaczenie jedynie przy pisaniu programu automatycznie rozwiązującego problem małych drgań np. w *Mathematice*.

Obliczenie macierzy (11) i (12) stanowi „kamień milowy” na drodze do uzyskania rozwiązania. Od tego momentu zadanie staje się *de facto* zadaniem z zakresu algebry liniowej. Dla porządku podaję funkcję Lagrange'a w przybliżeniu małych drgań:

$$\mathcal{L}_{MD} = \frac{1}{2}\,[\dot{\phi}_1, \dot{\phi}_2, \dot{\phi}_3] \circ \mathcal{K} \circ \begin{bmatrix} \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \\ \dot{\phi}_3 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\,[\phi_1, \phi_2, \phi_3] \circ \mathcal{J} \circ \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix}$$

gdzie „kółeczko” oznacza zwykłe mnożenie macierzy. Inny równoważny sposób zapisania f. Lagrange'a:

$$\mathcal{L}_{MD} = \frac{1}{2}\,\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\left(\mathcal{K}_{ij}\dot{\phi}_i\dot{\phi}_j - \mathcal{J}_{ij}\phi_i\phi_j\right).$$

Teraz nastąpi mała „dygrasja” tj. wyprowadzenie równań dla małych drgań. Nie potrzeba tego robić każdorazowo, normalnie od razu wypisujemy uogólniony problem własny dla macierzy $\mathcal{K}$ i $\mathcal{J}$. Przypominam, że są to macierze symetryczne (jako liczone z pochodnych cząstkowych). Wypiszemy teraz równania Lagrange-Eulera:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{MD}}{\partial \dot{\phi}_k} = \frac{\partial}{\partial \dot{\phi}_k}\left(\frac{1}{2}\,\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\mathcal{K}_{ij}\dot{\phi}_i\dot{\phi}_j\right) = \frac{1}{2}\,\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\mathcal{K}_{ij}[\delta_{ik}\dot{\phi}_j+\delta_{jk}\dot{\phi}_i] = \frac{1}{2}\,\left(\sum_{j=1}^{3}\dot{\phi}_j\mathcal{K}_{kj} + \sum_{i=1}^{3}\dot{\phi}_i\mathcal{K}_{ik}\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{3}\dot{\phi}_i\mathcal{K}_{ik}.$$

Analogicznie dostajemy:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{MD}}{\partial \phi_k} = \sum_{i=1}^{3}\phi_i\mathcal{J}_{ik}.$$

Równania Lagrange-Eulera:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}_{MD}}{\partial \dot{\phi}_k}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}_{MD}}{\partial \phi_k},$$

przyjmują postać:

$$\sum_{i=1}^{3}\ddot{\phi}_i\mathcal{K}_{ik} = -\sum_{i=1}^{3}\phi_i\mathcal{J}_{ik}, \tag{13}$$

lub zapisując (13) w postaci macierzowej:

$$\mathcal{K} \circ \begin{bmatrix} \ddot{\phi}_1 \\ \ddot{\phi}_2 \\ \ddot{\phi}_3 \end{bmatrix} = -\mathcal{J} \circ \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix}. \tag{14}$$

Równanie (14) to układ jednorodnych równań różniczkowych liniowych zwyczajnych drugiego rzędu. Standardowa procedura jego rozwiązywania to podstawienie:

$$\phi_1(t) = A_1 e^{i\omega t}, \quad \phi_2(t) = A_2 e^{i\omega t}, \quad \phi_3(t) = A_3 e^{i\omega t}, \tag{15}$$

gdzie A_k to pewne stałe. Wstawiamy (15) do (14), pamiętając, że różniczkowanie $\exp(i\omega t)$ po czasie to po prostu mnożenie przez $i\omega$. Otrzymujemy:

$$-\omega^2 e^{i\omega t} \mathcal{K} \circ \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = -e^{i\omega t} \mathcal{J} \circ \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix}.$$

Skracając przez eksponentę i przenosząc wszystko na jedną stronę otrzymujemy algebraiczny układ równań liniowych jednorodnych:

$$\left(-\omega^2 \mathcal{K} + \mathcal{J}\right) \circ \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = 0. \tag{16}$$

Normalnie pomijamy wyprowadzenie i przeskakujemy od razu tutaj. Wstawiamy (12) oraz (11) do (16), oznaczając dla wygody $\omega^2 = \lambda$ i przestawiając czynniki:

$$\left(\frac{kQ^2}{8R} \begin{bmatrix} 6\sqrt{2}+1 & -3\sqrt{2} & -1 \\ -3\sqrt{2} & 6\sqrt{2}+1 & -3\sqrt{2} \\ -1 & -3\sqrt{2} & 6\sqrt{2}+1 \end{bmatrix} - \lambda m R^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \circ \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = 0. \tag{17}$$

Aby uprościć notację, zauważamy że:

$$\frac{\lambda}{\frac{kQ^2}{8mR^3}} = \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2, \quad \text{gdzie:} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{kQ^2}{8mR^3}}.$$

Dlatego od tego momentu obliczenia wykonujemy dla:

$$\begin{bmatrix} 6\sqrt{2}+1-\lambda & -3\sqrt{2} & -1 \\ -3\sqrt{2} & 6\sqrt{2}+1-\lambda & -3\sqrt{2} \\ -1 & -3\sqrt{2} & 6\sqrt{2}+1-\lambda \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = 0, \tag{18}$$

pamiętając, że częstości własny są w jednostkach, w których $\omega_0 = 1$.

Równanie charakterystyczne (czyli wyznacznik macierzy w (18)) ma postać:

$$\lambda^3 - 3(6\sqrt{2}+1)\lambda^2 + 36\sqrt{2}\lambda + 182\lambda - 6(38\sqrt{2}+24) = 0. \tag{19}$$

Jego rozwiązanie[4] to:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}\left(1 + 12\sqrt{2} - \sqrt{145}\right), \quad \lambda_2 = 2 + 6\sqrt{2}, \quad \lambda_3 = \frac{1}{2}\left(1 + 12\sqrt{2} + \sqrt{145}\right).$$

Przypominam, że **częstości własne** (drgań) to $\sqrt{\lambda_k}$. Wstawiając kolejne wartości własne do (18) i rozwiązując uład równań na A_1, A_2 i A_3, otrzymamy wektory własne:

do wartości własnej $\lambda_1 \simeq 2.96$:

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{6}\sqrt{73 + \sqrt{145}} \\ 1 \end{bmatrix}$$

do wartości własnej $\lambda_2 \simeq 10.49$:

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

do wartości własnej $\lambda_3 \simeq 15.00$:

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{145}-1}{6\sqrt{2}} \\ 1 \end{bmatrix}$$

[4] Biorąc pod uwagę fakt, iż mało kto zna np. wzory na rozwiązanie równań 3 stopnia, otrzymanie tego wyniku jest wysoce nietrywialne za pomocą „długopisu i kartki".