

ZESTAW ZADAŃ 1

Zadanie 1.

Obliczyć podane całki:

$$\int \dot{x} x dt \equiv \int \dot{x}(t) x(t) dt \quad (1a)$$

$$\int \dot{x} \ddot{x} dt \quad (1b)$$

$$\int \dot{x} \cos x dt \quad (1c)$$

$$\int \dot{x}^3 \ddot{x} dt \quad (1d)$$

$$\int \frac{\ddot{x}}{x} - \left(\frac{\dot{x}}{x}\right)^2 dt \quad (1e)$$

$$\int \dot{x}^2 + \ddot{x}x dt \quad (1f)$$

gdzie $x(t)$ jest dowolną funkcją „czasu”, a kropką nad symbolem oznaczono pochodną funkcji:

$$\dot{x} = \dot{x}(t) \equiv \frac{dx(t)}{dt}, \quad \ddot{x} = \ddot{x}(t) \equiv \frac{d^2x(t)}{dt^2}, \quad \dots$$

Zadanie 2.

Podać równanie, które spełnia położenie $x(t)$ masy m pod wpływem działania siły pochodzącej od sprężyny o współczynniku k . Dla tego równania:

1. wyprowadzić zasadę zachowania energii
2. podać i naszkicować wykres potencjału (energii potencjalnej)
3. naszkicować trajektorie fazowe na płaszczyźnie (x, \dot{x}) w zależności od energii; w którą stronę odbywa się ruch?
4. przepisać równanie jako układ równań pierwszego rzędu
5. korzystając z całki energii obliczyć okres „drgań”
6. podać całkę ogólna równania i rozwiązanie zagadnienia początkowego

Zadanie 3.

Ruch jednowymiarowy jest opisany równaniem różniczkowym:

$$\ddot{x} + x - \frac{1}{x} = 0 \quad (3)$$

Dla równania (3) zbadać jakościowo charakter ruchu, czyli:

1. znaleźć całkę pierwszą (energii)
2. naszkicować wykres potencjału i zbadać ekstrema
3. ustalić dla jakich wartości energii ruch jest skończony/nieskończony
4. wyznaczyć punkty zwrotu dla $E \gg E_{min}$
5. naszkicować rodzinę trajektorii fazowych
6. obliczyć okres ruchu skończonego

Zadanie 4.

Zbadać jakościowo ruch jednowymiarowy w siłach o potencjale:

$$U(x) = ax^3 \quad (4a)$$

$$U(x) = \pm e^{-x^2}, \quad \text{lub} \quad U(x) = \pm \frac{x^2}{1+x^2} \quad (4b)$$

$$U(x) = |x|^x \quad (4c)$$

$$U(x) = (x-a)^2(x+a)^2 \quad (4d)$$

$$U(x) = -1 \quad (4e)$$

$$U(x) = \cos x \quad (4f)$$

Zadanie 5.

Cylindryczny pojemnik o wysokości $2H$ został wypełniony gazem doskonałym i przedzielony tłokiem o masie m . Zbadać ruch tłoka zakładając, że może poruszać się wyłącznie wzdłuż cylindra.