

Rysunek 1: Potencjał wynikający z treści zadania 1. Zaznaczono także punkty powrotu dla ruchu z energią  $E$ .

## KOŁOKWIUM I

### Zadanie 1.

Zbadać szczegółowo ruch koralika o masie  $m$  poruszającego się po prostym pręcie, jeżeli koralik został przymocowany do sprężyny o długości zero i współczynnika sprężystości  $k$ , a sama sprężyna do nieważkiego, nierozciągliwego, wiotkiego sznurka o długości  $L$ . Drugi koniec sznurka został umocowany w pewnym punkcie pręta. Zakładamy, że sznurek nie wpływa na ruch aż do momentu w którym zostanie w pełni wyprostowany.

Zbadać charakter ruchu. W przypadku ruchu periodycznego wyliczyć okres w zależności od energii.

### Rozwiązanie zadania 1.

W obszarze  $-L \leq x \leq L$  na koralik nie działają żadne siły, co oznacza, że potencjał  $U(x) = \text{const}$ . Przyjmujemy  $U = 0$ ; dodanie stałej nie wpływa na równania ruchu. Dla  $x < -L$  oraz  $x > L$  potencjał jest typu  $U(x) \sim \frac{1}{2}kx^2$  (oscylatora harmonicznego), ale odpowiednio przesunięty o  $\pm L$ . Cały potencjał można zapisać wzorami:

$$U(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} k (x + L)^2 & \text{dla } x < -L \\ 0 & \text{dla } -L \leq 0 \leq L \\ \frac{1}{2} k (x - L)^2 & \text{dla } x > L \end{cases} \quad (1)$$

Wykres potencjału pokazano na Rys. 1.

Dla energii  $E = 0$  koralik spoczywa w pewnym punkcie o współrzędnej  $-L \leq x_0 \leq L$ .  $E = 0$  jest minimalną dopuszczalną wartością energii. Dla  $E > 0$  ruch jest skończony i odbywa się w

obszarze  $x_1 \leq x \leq x_2$ , gdzie punkty powrotu  $x_p \equiv x_{1,2}$  wyznaczamy z zasady zachowania energii:

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U(x) = E. \quad (2)$$

W punktach powrotu prędkość jest równa zero ( $\dot{x} = 0$ ). Rozwiązując równanie:

$$U(x_{1,2}) = E, \quad (3)$$

czyli:

$$\frac{1}{2}k(x_1 + L)^2 = E, \quad \text{dla } x < -L \quad (4a)$$

oraz

$$\frac{1}{2}k(x_2 - L)^2 = E, \quad \text{dla } x > L, \quad (4b)$$

otrzymujemy:

$$x_1 = -L - \sqrt{\frac{2E}{k}}, \quad \text{bo } x_1 + L < 0, \quad \text{czyli } \sqrt{(x_1 + L)^2} = -(x_1 + L); \quad (5a)$$

oraz

$$x_2 = L + \sqrt{\frac{2E}{k}}, \quad \text{bo } x_2 - L > 0, \quad \text{czyli } \sqrt{(x_2 - L)^2} = x_2 - L. \quad (5b)$$

Punkty powrotu można zapisać razem:

$$x_{1,2} = \pm \left( L + \sqrt{\frac{2E}{k}} \right),$$

co odzwierciedla symetrię (parzystość) potencjału  $U(x)$ : ruch dla  $x < 0$  jest odbiciem ruchu dla  $x > 0$ .

Ruch w potencjale  $U(x)$  jest skończony dla każdej wartości energii  $E \geq 0$ , gdyż dla  $x \rightarrow \pm\infty$   $U(x) \rightarrow \infty$ .

Aby narysować krzywe fazowe można postąpić dwojako. Jeden ze sposobów, to narysowanie krzywej zadanej w postaci uwikłanej na podstawie zasady zachowania energii (2). Oznaczając prędkość  $\dot{x} = v$ , mamy:

$$\frac{1}{2}mv^2 + U(x) = E,$$

na płaszczyźnie  $(x, v)$ .

Dla  $E = 0$  istnieje nieskończenie wiele punktów spoczynku układających się na odcinku  $-L \leq x \leq L, v = 0$ . Dla  $E > 0$ , w obszarze  $-L \leq x \leq L$  mamy  $U(x) = 0$ , a więc:

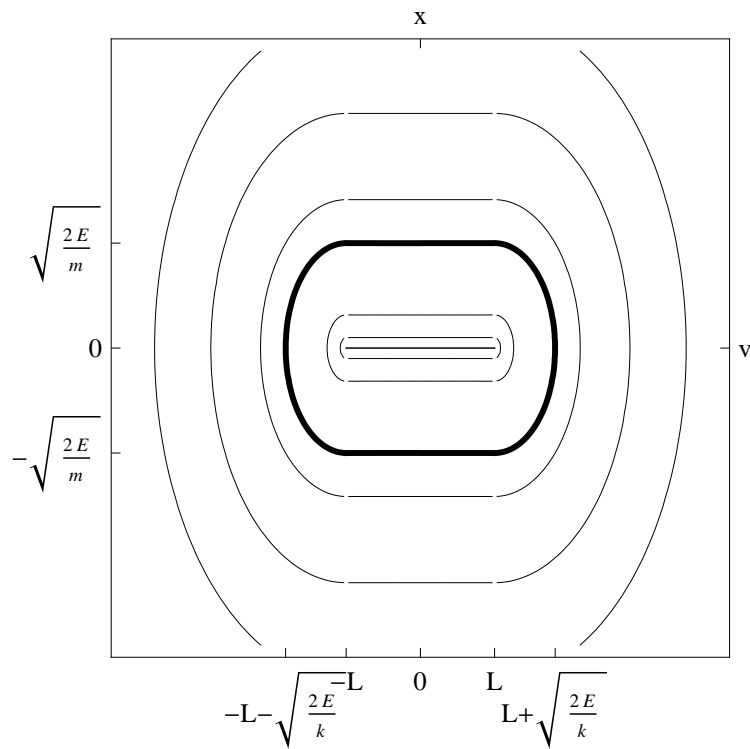
$$v = \pm \sqrt{\frac{2E}{m}} = \text{const},$$

czyli linia prosta równoległa do osi  $0x$ . Dla  $x > L$  dostajemy:

$$\left( \frac{x - L}{\sqrt{2E/k}} \right)^2 + \left( \frac{v}{\sqrt{2E/m}} \right)^2 = 1,$$

czyli równanie elipsy (a konkretnie jej prawej połówki) o środku  $(L, 0)$  i półosiach  $\sqrt{2E/k}$ ,  $\sqrt{2E/m}$ . Analogicznie dostajemy równanie dla  $x < -L$ .

Ostatecznie trajektoria „fazowa” dla pewnej energii  $E$  wygląda jak pokazano na Rys. 2.



Rysunek 2: Trajektorie fazowe dla zadanego problemu.

Inny sposób to narysowanie pola wektorowego otrzymanego w następujący sposób. Równanie ruchu:

$$m\ddot{x} = -\frac{\partial U(x)}{\partial x}, \quad (6)$$

które jest r.r. zwyczajnym II rzędu, przepisujemy (obniżamy rząd) jako układ dwóch równań I rzędu wprowadzając prędkość  $v = \dot{x}$  (ewentualnie pęd  $p = m\dot{v}$ ) jako nową funkcję. Otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} \dot{v} = -\frac{1}{m} \frac{\partial U(x)}{\partial x} \\ \dot{x} = v. \end{cases} \quad (7)$$

Prawa strona (7) wyznacza pewien wektor (pole wektorowe) określony w każdym punkcie płaszczyzny  $(x, v)$ . Rysując te wektory (np. jako strzałki) otrzymamy wykres, który daje dobre wyobrażenie o rzeczywistym przebiegu trajektorii fazowych.

Pole wektorowe ma postać:

$$\{x, v\} \rightarrow \{v, a(x)\}, \quad (8)$$

gdzie „przyspieszenie”  $a$  to:

$$a(x) = -\frac{1}{m} \frac{\partial U(x)}{\partial x}.$$

Obliczamy:

$$a(x) = -\frac{\partial U(x)}{\partial x} = \begin{cases} -k(x+L) & \text{dla } x < -L \\ 0 & \text{dla } -L \leq 0 \leq L \\ -k(x-L) & \text{dla } x > L. \end{cases} \quad (9)$$

Dla  $-L < x < L$  pole wektorowe przyjmuje postać:

$$\{x, v\} \rightarrow \{v, 0\},$$

czyli są to wektory równoległe do osi  $Ox$ , o długości  $v$  (im dalej od osi, tym dłuższe), powyżej osi  $Oz$  skierowane w prawo, a poniżej w lewo.

Dla  $x > L$  najprościej rozpatrzeć pole wektorowe na osi  $Ox$  (czyli dla  $v = 0$ ):

$$\{x, v\} \rightarrow \{0, -k(x-L)\}.$$

Wektory są skierowane pionowo w dół, a ich długość rośnie liniowo z  $x$  zaczynając od zera dla  $x = L$ . Analogicznie badamy przypadek  $x < -L$ . Brakujący obszar wypełniamy tak aby otrzymać szkic pola wektorowego, które powinno być ciągłe.

Pozostaje obliczenie okresu ruchu periodycznego w zależności od energii  $E$ . W tym celu wykorzystamy zasadę zachowania energii (2). Wyliczmy  $\dot{x}$ :

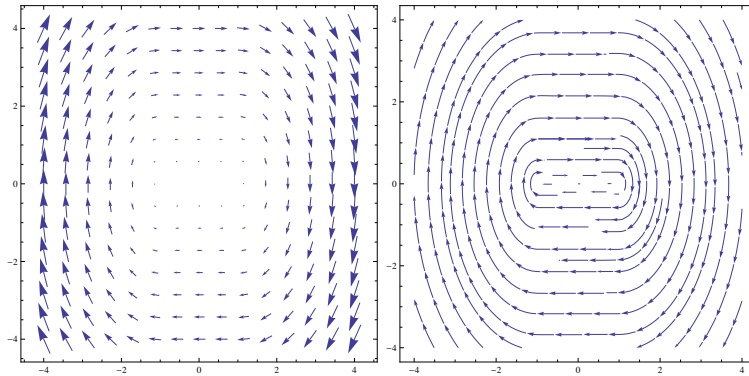
$$\dot{x} \equiv \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2(E-U(x))}{m}}.$$

Powyższe zapisujemy jako:

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{\frac{2(E-U(x))}{m}}},$$

i całkujemy od lewego punktu powrotu  $x_1$  do prawego  $x_2$  (5). Wynik całkowania mnożymy przez dwa, zgodnie z definicją okresu  $T$  (czas po którym układ wraca do stanu wyjściowego):

$$T = 2 \int_{-(L+\sqrt{\frac{2E}{k}})}^{+(L+\sqrt{\frac{2E}{k}})} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2(E-U(x))}{m}}}. \quad (10)$$



Rysunek 3: Pole wektorowe (8). Użyto **VectorPlot** (po lewej) i **StreamPlot** (po prawej) w *Mathematica*.

Całkę (10) można obliczyć bezpośrednim rachunkiem, lub wykorzystać argumentację „fizyczną”. Metoda „siłowa” wymaga rozbicia (10) na trzy całki:

$$T = 2(I_{1a} + I_2 + I_{1b}), \quad \text{gdzie :}$$

$$I_{1a} = \int_{-(L+\sqrt{\frac{2E}{k}})}^L \frac{dx}{\sqrt{\frac{2(E-\frac{1}{2}k(x+L)^2)}{m}}},$$

$$I_2 = \int_{-L}^L \frac{dx}{\sqrt{\frac{2E}{m}}}, \quad \text{bo } U(x) = 0, \quad \text{dla } -L < x < L,$$

oraz

$$I_{1b} = I_{1a}, \quad \text{ze względu na parzystość potencjału: } U(x) = U(-x).$$

Pewnego wysiłku wymaga jedynie obliczenie całki  $I_{1a}$ . Podstawiamy:

$$\frac{1}{2}k(x+L)^2 = u, \quad x(x+L)dx = 2udu.$$

Całka nieoznaczona jest równa:

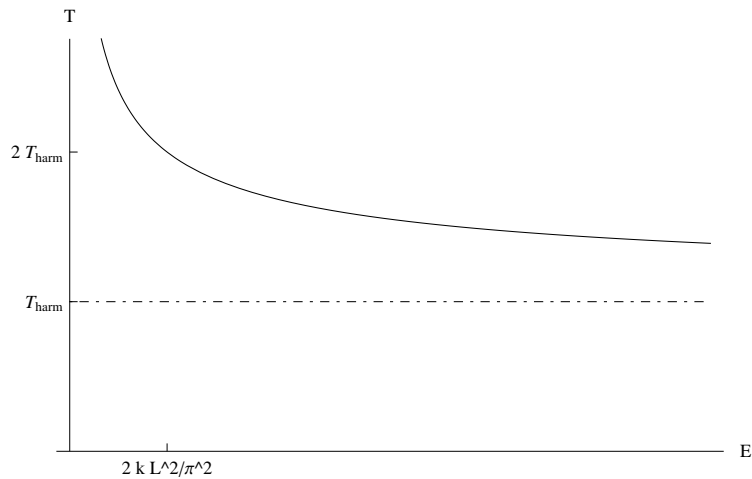
$$\sqrt{\frac{m}{2}} \frac{2}{\sqrt{2k}} \int \frac{du}{\sqrt{E-u^2}} = \sqrt{\frac{m}{k}} \arcsin \frac{u}{\sqrt{E}} = \sqrt{\frac{m}{k}} \arcsin \sqrt{\frac{k}{2E}}(x+L).$$

Całka oznaczona  $I_{1a}$  wynosi więc:

$$I_{1a} = \sqrt{\frac{m}{k}} \arcsin \sqrt{\frac{k}{2E}}(x+L) \Big|_{-L-\sqrt{2E/k}}^{-L} = \sqrt{\frac{m}{k}} (\arcsin 0 - \arcsin -1) = \sqrt{\frac{m}{k}} \frac{\pi}{2}.$$

Całka  $I_2$  jest całką z funkcji stałej, czyli:

$$I_2 = 2L \sqrt{\frac{m}{2E}}.$$



Rysunek 4: Okres ruchu periodycznego w zależności od energii (11).

Ostatecznie, okres wynosi:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} + 4L\sqrt{\frac{m}{2E}}. \quad (11)$$

Wynik (11) można *de facto* napisać bez żadnych obliczeń. Jego pierwszy składnik, to po prostu okres oscylatora harmonicznego, który jak wiadomo nie zależy od energii, natomiast drugi to czas niezbędny do pokonania dystansu  $4L$  ze stałą prędkością  $mv^2/2 = E$ . Wykres funkcji (11) prezentuje Rys. 4.

**Zadanie 2.**

Punkt materialny o masie  $m = 1$  porusza się w przestrzeni trójwymiarowej w polu sił o potencjale:

$$U = -a^2 \sqrt{1 + \frac{1}{r^2}}, \quad \text{gdzie: } a = 1. \quad (12)$$

Zbadać jakościowo charakter ruchu w zależności od krętu i energii. Wyznaczyć zależność promienia orbit kołowych od okresu obiegu po nich. Obliczyć okres małych drgań radialnych przyjmując parametry orbity kołowej jako punkt odniesienia.

**Rozwiązanie Zad. 2.**

Potencjał  $U$  zależy tylko od odległości od centrum, tj. ruch odbywa się w polu siły centralnej. Ruch taki jest ograniczony do płaszczyzny (prostopadłej do wektora momentu pędu), co wynika z niezmienniczości Lagrangianu ze względu na dowolne obroty i tw. Noether. Lagrangian nie zależy jawnie od czasu, czyli także energia jest zachowana. Dalszy rachunek wykonamy wprowadzając na płaszczyźnie standardowe współrzędne biegunowe  $(r, \phi)$ :

$$\begin{cases} x(t) = r(t) \cos \phi(t) \\ y(t) = r(t) \sin \phi(t). \end{cases}$$

Przypominam, że  $r(t) \geq 0$ . Łatwo pokazać, że we wsp. biegunowych energia kinetyczna wynosi:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2).$$

Funkcja Lagrange'a we wsp. biegunowych ma więc postać:

$$\mathcal{L}(r, \dot{r}, \phi, \dot{\phi}) = T - U = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) + a^2 \sqrt{1 + \frac{1}{r^2}}$$

Na początku powinno się naszkicować wykres funkcji  $U(r)$ , co da pewne wyobrażenie o możliwych ruchach<sup>1</sup> Obliczamy:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} U(r) = -a^2, \quad \lim_{r \rightarrow 0^+} U(r) = -\infty.$$

Funkcja  $U(r)$  nie posiada miejsc zerowych, a jej pochodna:

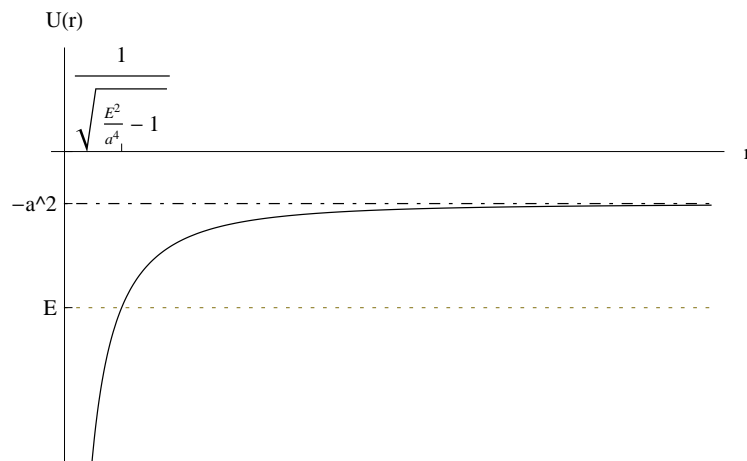
$$\frac{dU}{dr} = \frac{a^2}{r^3 \sqrt{1 + 1/r^2}} > 0.$$

Potencjał  $U(r)$  rośnie więc monotonicznie od  $-\infty$  w zerze, do  $-a^2$  w nieskończoności. Prosta  $U = -a^2$  jest jej asymptotą poziomą. Wykres pokazuje Rys. 5.

Wykres potencjału  $U(r)$  wystarcza aby zbadać ruch radialny, tj.  $\phi = \text{const}$ , odpowiadający zerowemu momentowi pędu  $J = 0$ . Ruch taki jest skończony dla energii  $E < -a^2$ , przy czym dochodzi do spadku na centrum ( $r = 0$ ). Dla  $E \geq -a^2$  ruch jest nieskończony, i także prowadzi do spadku na centrum.

Aby zbadać ruch z niezerowym momentem pędu, należy wykorzystać zasady zachowania energii i momentu pędu (Zobacz: Kotkin, Rozw. Zad. 2.1, str. 70-76), które można szybko wprowadzić z Lagrangianu, co teraz zrobimy.

<sup>1</sup>Np. gdyby okazało się, że  $U(r)$  monotonicznie maleje, to ruch skończony nie będzie możliwy, a więc także np. orbity kołowe.



Rysunek 5: Wykres potencjału  $U(r) = -a^2\sqrt{1 + 1/r^2}$ . Zaznaczono punkt powrotu dla ruchu z  $J = 0$  (zerowy moment pędu).

Obliczamy na początek wszystkie cztery potrzebne pochodne **cząstkowe**.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = mr\dot{\phi}^2 - \frac{a^2}{r^3\sqrt{1 + \frac{1}{r^2}}}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = mr^2\dot{\phi}.$$

Równania Lagrange-Eulera w jawnej postaci zwykle nie są potrzebne. Z pochodnych względem  $\phi$  i  $\dot{\phi}$  wynika, że:

$$\frac{d}{dt} (mr^2\dot{\phi}) = 0, \quad \text{czyli: } mr^2\dot{\phi} = \text{const} = J.$$

Równanie to wyraża II prawo Keplera, które pozostaje słuszne w dowolnym polu centralnym, gdyż wynika z zasady zachowania momentu pędu. Znak  $J$  nie ma istotnego znaczenia w takim polu, określa tylko czy ruch wokół centrum odbywa się zgodnie ( $J > 0$ ) czy przeciwnie ( $J < 0$ ) do ruchu wskazówek zegara.

Zasada zachowania energii, w postaci wynikającej wprost z tw. Noether ma postać:

$$\dot{\phi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} + \dot{r} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} - \mathcal{L} = E$$

lub po prostu:

$$T + U = E.$$

Ostatecznie otrzymujemy układ równań, który ma decydujące znaczenie w analizie ruchu:

$$\begin{cases} mr^2\dot{\phi} = J & (\text{z. z. momentu pędu}) \\ \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - a^2\sqrt{1 + \frac{1}{r^2}} = E & (\text{z. z. energii [mechanicznej]}). \end{cases}$$

Podstawiając w drugim równaniu (z.z energii):

$$\dot{\phi} = \frac{J}{mr^2},$$



otrzymujemy:

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + U_{eff}(r) = E.$$

Przez  $U_{eff}$  oznaczyliśmy potencjał efektywny:

$$U_{eff}(r) = \frac{J^2}{2mr^2} - a^2 \sqrt{1 + \frac{1}{r^2}}.$$

Zbadanie przebiegu funkcji (w tym naszkicowanie wykresu)  $U_{eff}(r)$  w zależności od parametru  $J$  stanowi główną trudność i „rdzeń” każdego typowego zadania dot. pola centralnego. Dla dalszej analizy potrzebne będzie także asymptotyczne zachowanie się  $U(r)$  w zerze i nieskończoności, a konkretnie jego porównanie z „potencjałem odśrodkowym”  $J^2/(2mr^2)$ . Na potrzeby zadania wystarczy zauważyć, że dla  $r \ll 1$  można pominąć 1 pod pierwiastkiem, gdyż  $1/r^2$  jest bardzo duże:

$$U(r) \simeq -a^2 \sqrt{1/r^2} = -\frac{a^2}{r}.$$

Dla  $r \gg 1$  wystarczy przyjąć, że:

$$U(r) \simeq -a^2 \left(1 + \frac{1}{2r^2}\right) \quad (\text{bo } \sqrt{1 + \epsilon} \simeq 1 + \epsilon/2).$$

Widać, że dla  $r \rightarrow 0$  dominuje „odśrodkowa” część potencjału (bo  $1/r^2 > 1/r$  dla  $r \ll 1$ ), natomiast dla  $r \rightarrow \infty$  część pochodząca od pola sił lub część „odśrodkowa”, w zależności od  $J$  (lub  $\lambda$ ). Można to formalnie zapisać (czy też obliczyć) jako:

$$\lim_{r \rightarrow 0} U_{eff}(r) = +\infty, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} U_{eff}(r) = -a^2 - 0.$$

Granice powyżej nie zależą od  $J$ . Wiemy więc, że wykres  $U_{eff}$  w pewien sposób przechodzi od  $+\infty$  do  $-a^2$ . Musi istnieć punkt przecięcia  $r_0$  (jeden lub więcej) z osią poziomą<sup>2</sup>. Rozwiązujemy równanie  $U_{eff} = 0$ :

$$\frac{J^2}{2mr^2} = a^2 \sqrt{1 + \frac{1}{r^2}}.$$

Podstawiamy  $\lambda = J^2/a^2/m$ , wyciągamy  $a^2$  i dostajemy:

$$\frac{\lambda}{2r^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{r^2}}.$$

Podnosząc obustronnie do kwadratu rozwiązujemy równanie kwadratowe o niewiadomej  $x = 1/r_0^2$ , co daje (rozw. ujemne odrzucamy):

$$\frac{1}{r_0^2} = \frac{2}{\lambda^2} \left(1 + \sqrt{1 + \lambda^2}\right),$$

po obliczeniu odwrotności („odwróceniu ułamka”) i usunięciu niewymierności z mianownika dostajemy:

$$r_0^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{1 + \lambda^2} - 1).$$

Powyższe wyrażenie jawnie pokazuje, że punkt przecięcia przemieszcza się od  $r \simeq \lambda/2$  dla  $\lambda \ll 1$  do nieskończoności, w przybliżeniu liniowo ze wzrostem  $\lambda$  (a więc  $J^2$ ).

<sup>2</sup>Ewentualnie osobliwość, co można w tym przypadku wykluczyć, gdyż dziedzina  $U_{eff}$  to ewidentnie  $r > 0$ .

Przystępujemy do zbadania monotoniczności i ekstremów. Pochodna potencjału efektywnego wynosi:

$$\frac{dU_{eff}}{dr} = \frac{a^2}{r^3} \left( \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{r^2}}} - \lambda \right).$$

Warunek konieczny na istnienie ekstremum to zerowanie się pierwszej pochodnej. Rozwiązując równanie otrzymujemy (ponownie odrzucamy ujemne):

$$r_{min} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \lambda^2}}, \quad \text{wygodna postać: } 1 + \frac{1}{r_{min}^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Rozwiązanie istnieje tylko dla  $0 < \lambda < 1$ . Dla  $\lambda \geq 1$  pierwsza pochodna jest zawsze ujemna, czyli  $U_{eff}$  monotonicznie przechodzi od  $+\infty$ , przecinając oś w  $r = r_0$  i dążąc do  $-a^2$  od góry. Aby definitywnie ustalić, że w  $r_{min}$  faktycznie jest minimum, obliczamy drugą pochodną:

$$\frac{d^2U_{eff}}{dr^2} = \frac{a^2}{r^6} \left[ \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{r^2}}^3} - 3r^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{r^2}}} - \lambda \right) \right].$$

Dla  $r = r_{min}$  otrzymujemy (wyrażenie w nawiasie okrągłym powyżej wynosi zero, bo jest to warunek zerowania się pochodnej):

$$\left. \frac{d^2U_{eff}}{dr^2} \right|_{r=r_{min}} = a^2 \left( \frac{1}{\lambda} - \lambda \right)^3 > 0 \quad \text{dla } 0 < \lambda < 1.$$

Obliczamy jeszcze  $U_{eff}(r_{min})$  celem wyznaczenia dopuszczalnego zakresu wartości energii:

$$U_{eff}(r_{min}) = -\frac{a^2}{2} \left( \frac{1}{\lambda} + \lambda \right) = E_{min} < -a^2.$$

Dodatkową informację można też uzyskać badając zachowanie się  $U_{eff}$  w nieskończoności:

$$U_{eff}(r) \simeq -a^2 \left( 1 + \frac{1 - \lambda}{2r^2} \right).$$

Z powyższego widać, że potencjał efektywny zbliża się do asymptoty  $-a^2$  od dołu dla  $\lambda < 1$ , i od góry dla  $\lambda \geq 1$ . Dla  $\lambda = 1$  potrzebne jest rozwinięcie do wyrazów czwartego rzędu.

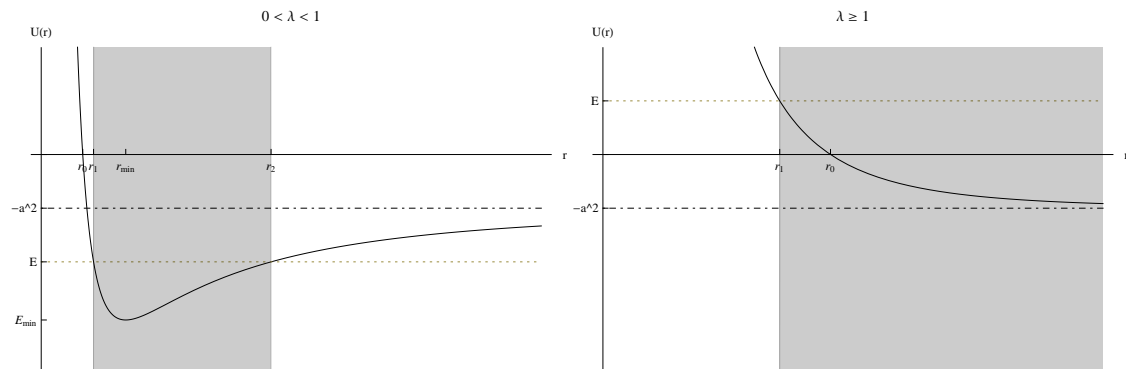
W potencjale efektywnym dla można analitycznie wyznaczyć punkty powrotu, dwa dla  $-\kappa = E/a^2 < -1$ , i jeden dla  $-\kappa = E/a^2 > -1$ . Dla  $\kappa > 1$  dostajemy:

$$r_{1,2} = \frac{\sqrt{1 - 2\kappa\lambda + \lambda^2} \pm (1 - \kappa\lambda)}{2(\kappa^2 - 1)}.$$

Wyznaczenie promienia orbity kołowej jest równoważne szukaniu ekstremów pot. efektywnego, co zostało już zrobione. Okres obiegu po orbicie kołowej wynosi:

$$\frac{2\pi}{T_{orb}} = \omega = \dot{\phi} = \frac{J}{mr_{min}^2}$$

gdzie należy jeszcze wyrugować  $J$ , aby otrzymać związek pomiędzy  $T$  a  $r_{min}$ , zastępujący III prawo Keplera w tym polu.



Rysunek 6: Wykres potencjału efektywnego  $U_{eff}(r)$ , dla dwóch istotnie różnych zakresów parametru  $\lambda = J^2/a^2/m$ . Przypadek dla  $J = 0$  (ruch radialny) został rozpatrzony wcześniej. Radialny obszar ruchu z energią  $E$  został zacieniowany.

Można postąpić w inny sposób, wygodny jeżeli jedynym zadaniem jest wyznaczenie orbit kołowych. Obliczmy siłę (zawsze radialną w polu centralnym):

$$F_r = -\frac{dU(r)}{dr} = -\frac{a^2}{r^3\sqrt{1+1/r^2}}.$$

Na orbicie kołowej siła ta jest równoważona przez siłę odśrodkową ( $F_{od} + F_r = 0$ ):

$$F_{od} = m\omega^2 r,$$

co ostatecznie daje:

$$\omega_{ORB}^2 = \frac{a^2/m}{r_{min}^3\sqrt{1+r_{min}^2}}.$$

Na koniec pozostaje wyznaczenie okresu małych drgań radialnych. Częstość małych drgań wynosi:

$$\omega_{RAD}^2 = \frac{k}{m}, \quad \text{gdzie: } k = \left. \frac{d^2 U_{eff}}{dr^2} \right|_{r=r_{min}}.$$

Potrzebna druga pochodna została już wcześniej obliczona, i otrzymujemy wynik:

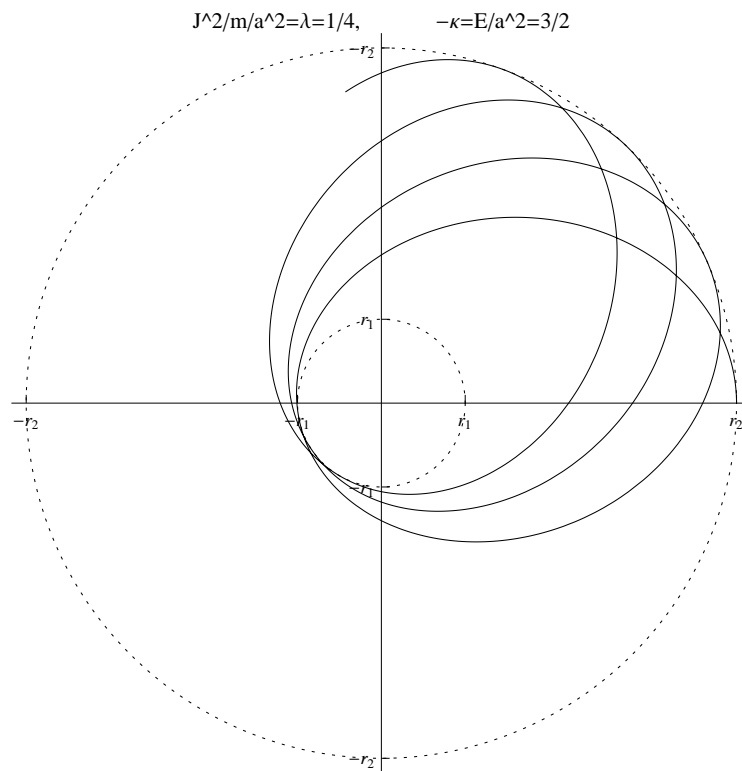
$$\omega_{RAD}^2 = \frac{a^2}{m} \left( \frac{1}{\lambda} - \lambda \right)^3.$$

Aby poprawnie określić (jakościowo) kształt toru, musimy ustalić który z okresów: radialny czy orbitalny jest większy. Przepisujemy częstość orbitalną  $\omega_{ORB}$  jako:

$$\omega_{ORB}^2 = \frac{a^2}{m} \frac{1}{\lambda} \left( \frac{1}{\lambda} - \lambda \right)^2,$$

i otrzymujemy:

$$\frac{T_{RAD}}{T_{ORB}} = \frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}}.$$



Rysunek 7: Przykładowa orbita w ruchu skończonym przestrzennie.

Ponieważ warunkiem istnienia ruchu skończonego jest  $\lambda < 1$ , widać, że w przybliżeniu małych drgań:

$$T_{RAD} > T_{ORB}.$$

Orbity mają więc kształt lekko zakrzywionych krzywych (Rys. 7), bo więcej czasu jest potrzebne na przejście od  $r_1$  do  $r_2$  i z powrotem, niż na wykonanie pełnego obrotu wokół centrum pola.

**Zadanie 3.**

Dany jest Lagrangian:

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}) = \frac{x^2 + \dot{x}^2}{x\dot{x}} \quad (13)$$

Znaleźć wielkość zachowaną wynikającą z niezmienniczości względem symetrii skalowania. Rozwiązać równania ruchu z warunkami początkowymi:

$$x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 1,$$

a także z warunkami brzegowymi:

$$x(0) = 1, \quad x(1) = 2.$$

**Rozwiązanie Zad. 3.**

Symetria skalowania polega na pomnożeniu funkcji  $x(t)$  przez dowolną liczbę  $\lambda \neq 0$ :

$$x(t) = \lambda \tilde{x}(t). \quad (14)$$

Pochodna po czasie transformuje się analogicznie, co widać np. poprzez obustronne zróżniczkowanie (14):

$$\dot{x}(t) = \lambda \dot{\tilde{x}}(t).$$

Funkcja Lagrange nie zmienia się pod wpływem (14):

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}) = \frac{x^2 + \dot{x}^2}{x\dot{x}} = \frac{\lambda^2 \tilde{x}^2 + \lambda^2 \dot{\tilde{x}}^2}{\lambda \tilde{x} \lambda \dot{\tilde{x}}} = \frac{\tilde{x}^2 + \dot{\tilde{x}}^2}{\tilde{x} \dot{\tilde{x}}} = \mathcal{L}(\tilde{x}, \dot{\tilde{x}}).$$

Transformację (14) zapisujemy jako:

$$x(t) = \tilde{x}(t) + \epsilon \tilde{x}(t),$$

a transformacja do niej odwrotna dla  $\epsilon \ll 1$  to:

$$\tilde{x}(t) = \frac{x(t)}{1 + \epsilon} \simeq x(t) - \epsilon x(t).$$

Generatorem transformacji jest więc:

$$G(x) = -x.$$

Zgodnie z tw. Noether, wielkością zachowaną jest:

$$x \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = C.$$

Obliczamy wymagane pochodne cząstkowe, i dostajemy:

$$C = x \frac{x\dot{x}2\dot{x} - (x^2 + \dot{x}^2)x}{(x\dot{x})^2} = 1 - \left(\frac{x}{\dot{x}}\right)^2. \quad (15)$$

Wykorzystamy (15) do znalezienia rozwiązania ogólnego równań Lagrange-Eulera (których nie potrzebujemy w jawnej postaci). Przepisujemy:

$$\frac{\dot{x}}{x} = \frac{d}{dt} \ln x(t) = \frac{1}{\sqrt{1+C}},$$

czyli:

$$\ln x(t) = \frac{t}{\sqrt{1+C}} + C_2, \quad \rightarrow \quad x(t) = C_3 e^{t/\sqrt{1+C}}.$$

Dla zadanych warunków początkowych dostajemy:

$$x(0) = C_3 = 1, C = 1 - \left( \frac{x(0)}{\dot{x}(0)} \right)^2 = 0,$$

czyli:

$$x(t) = e^t.$$

Dla zadanych warunków brzegowych dostajemy:

$$x(0) = C_3 = 1, \quad x(1) = e^{1/\sqrt{1+C}} = 2,$$

czyli:

$$x(t) = e^{\ln 2t} = 2^t.$$

Inny sposób rozwiązania, to wypisanie r. Lagrange-Eulera i ich rozwiązanie poprzez obniżenie rzędu:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \frac{2}{x^3} (\ddot{x}x - \dot{x}^2) = 0,$$

$$\ddot{x}x = \dot{x}^2,$$

podstawiamy:

$$\dot{x} = v, \quad \ddot{x} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} v,$$

co daje:

$$\frac{dv}{v} = \frac{dx}{x}, \quad \text{czyli:} \quad \ln v = \ln x + C_1, \quad v(x) = C_2 x \quad \dot{x} = C_2 x.$$

Ostatecznie:

$$x(t) = C_3 e^{C_2 t}.$$

Jeszcze inny sposób to skorzystanie z zasady zachowania „energii”:

$$\dot{x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} - \mathcal{L} = \text{const} = E,$$

co daje równanie bardzo podobne do (15):

$$-2 \frac{x}{\dot{x}} = E.$$